高１・２　ハイレベル数学ⅠAⅡBを受講するみなさんへ

ようこそ，『スタディサプリ』 数学の講座へ！　この講座は，**次のような人**に効果的です．

● **「学校の学習に加えて一歩進んだ学習をしたい」**という意欲的な人
　⇒　この講座を受講すると，本質的な理解が身につきます．
　　　学校で習った知識をより深めることで，さらに学校の授業が楽しくなります．

● **「教科書で理解が不十分だったところをちゃんと理解したい」**という人
　⇒　この講座には，新たにこの分野を勉強するために書かれたページが用意されています．
　　　そしてわかったかを確かめるための問題で，理解度をチェックできます．

● **「問題集を解いたけど解き方がしっくりこない…」**という疑問をもっている人
　⇒　この講座には，すべての問題に「詳細な解答」がついています．
　　　もちろん，メインとなる「講義問題」には，リアルな迫力の「動画授業」も！
　　　受けている間にその解法や世界に引き込まれるでしょう．

そして，こんな人にも効果的です．

●受験で使うから，もっと数学ができるようになりたい！

●暗記して計算して乗り切ってきたけど，本質を理解したい！

そのすべてをかなえるために用意されたのが以下です．

◎**『テキスト』** …「基礎確認事項」「CHECK ＆ UP」「講義問題」「練習問題」

◎**『講義動画（授業）』**

◎**『テキスト 解答集』** …「CHECK＆UP の解答」「講義問題の解答」「練習問題の解答」

「授業を受けっぱなし」「板書で省略された途中計算がわからない」「せっかく練習問題を解いたのに答しかない」といった問題をすべて解決！　これらの効果的な使い方は後ほど説明しますが，このサイクルをしっかり活用すれば，学校の授業や自分の勉強がより楽しくなることでしょう．**わかれば，面白い．面白ければ，先が知りたくなる．**当然ですね．

「人から人へ」．それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません．直接会うことはなかなかできませんが，みなさんが真剣に授業を視聴すれば，まるで目の前に先生がいるような錯覚すら覚えることでしょう．なぜなら，先生はいつでも君たち一人ひとりが真剣に授業を受けている姿をカメラの向こうに見ながら授業をしているのですから．

さぁ，そろそろ時間です．**いつでも，どこでも，何度でも．**ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

＜前期　目次＞

第１講　数と式・方程式・不等式
第２講　２次関数⑴
第３講　２次関数⑵
第４講　２次関数⑶
第５講　２次関数⑷
第６講　三角比⑴
第７講　三角比⑵
第８講　三角比と平面図形⑴
第９講　三角比と平面図形⑵
第10講　集合・場合の数⑴
第11講　場合の数⑵
第12講　場合の数⑶
第13講　確率⑴
第14講　確率⑵
第15講　命題と証明
第16講　式と証明⑴
第17講　式と証明⑵
第18講　三角関数⑴
第19講　三角関数⑵
第20講　三角関数⑶
第21講　図形と方程式⑴
第22講　図形と方程式⑵
第23講　図形と方程式⑶
第24講　図形と方程式⑷
（以下，後期に続く）

＜講座の受講の仕方＞

ここでは，効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします．講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答冊子」に分かれています．この３つを効果的に使い，実力を伸ばしていきましょう．

①　基礎確認事項（テキスト）

すべての講は，まずこの「基礎確認事項」から始まっています．各分野の基礎となる事項がまとめられています．みなさんの持っている教科書と同じ表現もあれば，そうでない部分・発展的表現も含まれています．

・この分野を習っていない人

・習ったけどもう一度確認したい人

・理解しているつもりだけど穴がないか，理解不足がないかチェックしたい人

は，必ずこの「基礎確認事項」を熟読してください．**この分野を深く学ぶ上で必要な知識や考え方が身につく**ことでしょう．

しかし，注意点として，「書いてあることすべてを最初から理解しようとしない」ことです．問題を解いている中で理解が深まることや，後から振り返ってもう一度読んだときにその意味がわかることもあります．まず大切なのは「全体像」をつかむことです．

また，区切りごとに「⇒　C&U ①」として，関連する「CHECK & UP」の問題が示されています．参考にしてください．

②　CHECK & UP（テキスト）

「基礎確認事項」に続き，この「CHECK & UP」が掲載されています．この問題は，「基礎確認事項」とリンクした問題です．

・基礎確認事項で整理した知識を試したい人

・この分野の問題を一通りざっと確認したい人

・忘れたかけた知識を取り戻したい人

は，この「CHECK & UP」を必要に応じてノートに解きましょう．解き終えたら「テキスト解答」の「CHECK & UP」の欄を参照してください．解くときの方針・注意点・別解などが掲載されていますので，自分の解き方・途中計算などをチェックしておいてください．

この「CHECK & UP」の問題数は，教科書や教科書準拠問題集に載っている問題から見れば少ないと思うかもしれません．みなさんは学校の宿題や自分の学習でそういった問題を数多くこなすはずです．この「CHECK & UP」はそういった中から重要項目を中心に厳選して掲載しています．みなさんの自主学習により，さらなる問題にチャレンジし，さらに理解を深めておきましょう．また，解いていてつまづいた場合は，前の「基礎確認事項」にもう一度目を通しましょう．

③　講義問題について（テキスト）

「講義問題」は大問３問で構成されています．すべて厳選された無駄のない問題構成です．この分野をすでに習った人は，この問題をノート等に「予習」として解いてみましょう．自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります．また，この分野が未習，または理解が不十分のときは，問題を読み，問われていることを理解しておきましょう．

・より上の実力を身につけたい

・発展的な考え方を知りたい

そんなみなさんのニーズにしっかり応える問題です．

ちなみに予習される人への注意です．必ずしも答案形式にこだわる必要はありません．また，最後まで解けなくてもかまいません．１問につきおよそ10分～15分．数学に本気で向き合い，自分なりに書いてみましょう．

④　講義について（動画）

予習をすること，または問題文を読んで趣旨を理解すること，これが講義動画を視聴する前に必要な準備です．それができている状態で，動画を再生してください．そして，真剣に視聴して，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください．

講義問題ごとで区切って視聴してもよいですし，１講まるごと視聴してもよいです．大事なのは

・「集中力」

・「集中しよう」「何かをこの先生から得てやる」という「気持ち」

・数学ができるようになりたいという「思い」

をもって視聴することです．惰性はいけませんよ．

テキストの講義問題のページはすべて「見開き」の構成となっており，余白（< Note >欄）がふんだんに用意されています．ここには何でも「自由」に書いて残すことができます．「自由」とはどういうことか．それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです．授業時間は限られていますから，先生はすべてを黒板に書くことはしていません．よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです．きれいにまとめても誰も見てくれませんよ．あくまで「Note」=「記録」です．後から見て自分だけがわかる程度でいいのです．それをメモしながら視聴してください．

ちなみにこれまでの人生で書く速度を向上させる努力をしてこなかった人へ．この講座はいつでも止めたり戻ったりできます．しかし，聞きながら書くという訓練はこれからでもまったく遅くありませんよ．この講座でその訓練をしてください．また，動画をストップできるからといって「考えすぎ」は逆に禁物です．あなた方に残された時間は限られています．勉強は数学だけじゃないでしょう？　「基礎確認事項」のところでも述べましたが，大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事ですよ．

⑤　講義問題の復習について（テキスト・解答集）

視聴が終わったら，テキストの問題を見ながらまずは問題によって語られた「ストーリー」を，もう一度頭に描いてみましょう．もし思い出せない場面があったら＜ Note ＞欄を見てみましょう．そしてそこで描いた世界観を基に，次に自分で実際に問題を，別の紙や復習用ノートに解いてみましょう．予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述して行きましょう．もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします．

もちろん数学という教科の特性上，あなたの技術力の不足などにより途中で止まってしまうかもしれません．また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません．安心してください．すべての問題に「講義問題の解答」がついています．必要に応じて参考にしてください．最初は見てもよいのです．見たら，今度は自分で書いて見ましょう．

・「復習したときが，真の学習の完成」

講義問題の復習をこのような気持ちをもって欠かすことなく行い，解答を自分の力だけで書き上げることができた時…その時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です．こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう．

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います．そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします．チャンスは「空き時間」「隙間時間」です．一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります．それを実感することも成長の糧となりましょう．

⑥　練習問題ついて　（テキスト・解答集）

④や⑤が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう．「練習問題」が各講１題ずつ用意してあります．講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります．また問題によって難易度もさまざまです．講義で得たことを参考に解いてみましょう．

・「自分はちゃんと理解できているのか」

・「新しい問題に見えても，今までの知識を使えるか」

それをこの練習問題で試してみてください．解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう．この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です．より理解を深めていただきたく思います．

以上を確実に繰り返すことにより，「自分で考える」領域に徐々に近づくことができます．入試を想定すると，最終的には自分で答案を作り上げる必要があります．授業を受けるだけでは，「受けっぱなし」に終わることもあるでしょう．また，記憶とともに忘れ去られてしまうことも．それを防ぐためにこのサイクルが大切です．もちろん，講義動画は何度でも再生可能です．後から改めて見るとその意味がわかった，という声もよく耳にします．決して短くはないこの道

のり．１日１日，一歩一歩，焦らず，確実に進んで行きましょう．

　最後に．この講義と同時並行で進める日々の自主学習においては，その理解を深めるための「解説」が重要です．例えば「授業」や「解答集」がそれに当たります．特に「詳細な解答」，つまり答に行き着く「プロセス」を自分の解答と照らし合わせる作業が欠かせません．よって「最後の答」しかない問題集やプリントではお話になりません．自分で考えれば必ず答にたどり着く！と主張する先生もいますが，「知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう．受験勉強に求められるのは，「時間対効果」です．

　よい道筋を参考に，自分で切り拓く時の「道標」としながら自主学習を進めて行きましょう．

第1講　数と式・方程式・不等式

【基礎確認事項】

［1］　単項式と多項式

□ 2，$-3x$，$\frac{1}{2}x^2y$，$-xyz$ のように，定数のみの式も含めて数や文字の積として表される式を**単項式**といい，掛けあわされている文字の個数を**次数**，文字以外の部分を**係数**という．

例　$-5xy^2$ の次数は 3，係数は -5

□特定の文字に着目して，その他の文字と数の積は係数と考えることがある．

例　$-5xy^2$ で x に着目すると次数は 1，係数は $-5y^2$，
y に着目すると次数は 2，係数は $-5x$

□いくつかの単項式の和として表される式を**多項式**といい，それらの単項式をその多項式の**項**という．

例　$x^2-2xy-y^2+3$ は $x^2+(-2xy)+(-y^2)+3$ と変形できるので，
x^2，$-2xy$，$-y^2$，3 はこの多項式の項である．

□多項式の項のうち，着目した文字の部分が同じ項を**同類項**という．同類項をまとめた多項式において，各項の次数の中で最も大きいものをその多項式の**次数**といい，次数が n である多項式を **n 次式**という．また，着目した文字を含まない項を**定数項**という．

例　$x^2+3x-y^2-4xy+5$ で x に着目すると，$3x$ と $-4xy$ は同類項となるので，
$x^2+(3-4y)x-y^2+5$ となり，これは x の 2 次式である．また，定数項は
$-y^2+5$ である．

□単項式と多項式をあわせて**整式**という．単項式を項の個数が1つの多項式と考えることもある．

□2つの整式 A，B をそれぞれ同類項をまとめて整理した結果，A の項と B の項が順序の違いを除いて一致するとき，整式 A と整式 B は等しいという．

例　x^2+2x+1 と x^2+1+2x は等しい．

□ある文字に着目して整式を次数の高い項から順に並べることを**降べきの順**に整理するという．等しい整式は，降べきの順に整理すると順序も含めて全く同じ式となる．

⇒　C&U 1

［2］　整式の四則

□整式の加法・減法については，それぞれすべての項の和・差をとって同類項をまとめる．

□文字 a を n 個掛けあわせたものを a の **n 乗**といい，a^n とかく．また，積を表す記号「×」の代わりに「・」を使って表現してもよい．

例　$a^5=a\times a\times a\times a\times a=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$

□a^n における n を指数といい，a^n で表されるものをまとめて a の**累乗**という．

□一般に，m，n を正の整数とするとき，次の指数法則が成り立つ．

1　$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　2　$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$　　3　$(ab)^n = a^n b^n$

□数の場合に適用した

交換法則　$a+b=b+a$　　$ab=ba$

結合法則　$(a+b)+c=a+(b+c)$　　$(ab)c=a(bc)$

分配法則　$m(a+b)=ma+mb$

を整式にも適用して計算することができる．

□整式の加法，減法，乗法の結果は必ず整式となるが，整式を整式で割った商は，必ずしも整式になるとは限らない．

⇒　C&U ②

［3］　乗法の公式

□整式の積を展開するとき，次の公式を利用する．いずれも実際に左辺を展開することで導かれる．

1　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

2　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

3　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$　　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

次の3次式の展開についての公式も覚えておくとよい．

4　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

5　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

⇒　C&U ③

［4］　因数分解

□1つの整式 A が2つ以上の整式 B，C，…… の積の形で表せるとき，B，C，…… を**因数**といい，因数の積の形で表すことを因数分解という．

□因数分解は必ずしも可能とは限らず，逆に因数分解せよという問題には必ず何らかの特徴があり，それを利用することにより因数分解ができる．以下は因数分解の公式である．

1　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$　　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

2　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

3　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$　　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例　$2x^2+7x+3$ を例に **3** の公式を満たす a，b，c，d を求める手順を示す．

① $ac=2$，すなわち積が 2 となる 2 数を考え，縦にならべる．

② $bd=3$，すなわち積が 3 となる 2 数を考え，縦にならべる．

③ ①，②により $ad+bc=7$ となることを確かめるために**たすき掛け**を行い，その和をとる．

④ ③の結果が 7 となることにより，$a=2$，$b=1$，$c=1$，$d=3$ を用いて $(2x+1)(x+3)$ と因数分解できる．

```
2      1
1      3

2 ╲╱ 1 ⟶ 1
1 ╱╲ 3 ⟶ 6
         ───
           7
```

□次の 3 次式の因数分解についての公式も覚えておくとよい．

4　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$　　$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

5　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

□因数分解においては，次の点に注意して行うとよい．

・置き換え　　・部分的に因数分解

・次数の最も低い文字（同次数の場合はどれかの文字）に着目し，降べきの順に整理

⇒ **C&U** 4

［5］ 実数

□ 2 つの整数 m，n $(n\neq0)$ を用いて，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形で表される数を**有理数**といい，$n=1$ のときが整数である．つまり整数は有理数に含まれる．

□この $\dfrac{m}{n}$ について $m\div n$ を計算して小数で表すと，小数第何位かで終わる**有限小数**と，ある位から先で同じ数字の並びが繰り返されて無限に続く**循環小数**に分けられる．

□循環しない無限小数で表される数があり，これを**無理数**という．無理数は 2 つの整数 m，n を用いて $\dfrac{m}{n}$ の形で表すことはできない．

□有理数と無理数をあわせて**実数**という．

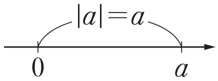
- 実数
  - 有理数
    - 整数
      - 自然数
      - 0
      - 負の整数
    - 整数でない有理数
      - 有限小数　$\dfrac{1}{2}=0.5$
      - 循環小数　$\dfrac{1}{3}=0.333\cdots$
  - 無理数（循環しない無限小数）　$\sqrt{2}=1.4142\cdots$

□ a が実数のとき，数直線上で a を表す点と原点 O との間の距離を a の**絶対値**といい，$|a|$ で表す．

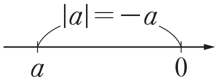
$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

$a\geqq 0$ のとき



$a<0$ のとき



□ 2乗すると a になる数を，a の**平方根**という．正の実数 a の正の平方根を $\sqrt{a}$，負の平方根を $-\sqrt{a}$ と表す．また $\sqrt{0}=0$ とする．

□平方根の主な性質は以下．

$a>0$，$b>0$ のとき

$$(\sqrt{a})^2=a \qquad \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

また，$a>0$ のときは $\sqrt{a^2}=a$ であるが，$a<0$ のときは $\sqrt{a^2}=a$ ではない．

例　$\sqrt{(-3)^2}=-3$ ではなく 3

$a<0$ のときは $-a>0$ であることより $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a$ が成り立つ．

すなわち　$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

である．つまり $\boxed{\sqrt{a^2}=|a|}$ である．

□分母の有理化については以下．

$a>0$，$b>0$ のとき $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

□根号を二重に含む式について，一般的に以下が成り立つ．

$a>0$，$b>0$ のとき　$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$ のとき　$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

⇒　C&U 5

［6］　1次不等式

□数量の間に成り立つ大小関係を不等号を用いて表した式を**不等式**という．不等式には次の性質がある．

$A>B$　ならば　　$A+C>B+C$，$A-C>B-C$

$A>B$ かつ $C>0$ ならば $AC>BC$，$\dfrac{A}{C}>\dfrac{B}{C}$

$A>B$ かつ $C<0$ ならば $AC<BC$，$\dfrac{A}{C}<\dfrac{B}{C}$

□両辺に負の数を掛けたり，負の数で割ったりすると，両辺の大小関係が逆転する．

□x についての不等式において，その不等式を成り立たせる x の値の範囲を不等式の**解**といい，不等式の解を求めることを不等式を**解く**という．通常，不等式を解くときは，上記の不等式の性質を用いる．また，不等式の解は数直線を用いて図示することができる．

□いくつかの不等式を列挙した**連立不等式**において，その共通する範囲を連立不等式の解といい，解を求めることを連立不等式を**解く**という．

⇒　C&U 6

［7］　絶対値と方程式，不等式

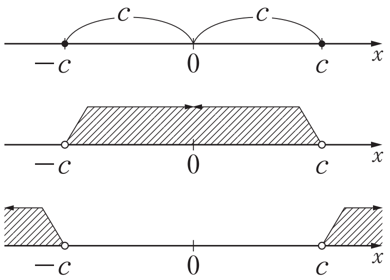
□絶対値は原点からの距離である．したがって，絶対値を含む方程式，不等式の解について，一般に以下のことが成り立つ．

$c>0$ のとき

方程式 $|x|=c$ の解は　$x=\pm c$

不等式 $|x|<c$ の解は　$-c<x<c$

不等式 $|x|>c$ の解は　$x<-c$，$c<x$



□絶対値記号を複数含む場合などについては，絶対値記号の中の符号を変化させる変数の値によって場合分けをして，絶対値記号をはずす．

例　$|x-4|$ は　$x\geqq 4$ のとき $x-4$，$x<4$ のとき $-x+4$

⇒　C&U 7

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　整式 $x^2-3xy+4y^2+5x-y+2$ を x に着目し，降べきの順に整理せよ．また，その次数と定数項を答えよ．

2　$A=3+a-2a^2$，$B=2a+a^2-1$ のとき，$A+B$，$B-2A$，AB をそれぞれ計算せよ．

3　次の式を展開せよ．

(1)　$(2a-3b)^3$　　(2)　$(x+1)^3(x^2-x+1)^3$

(3)　$(a+b+c)^2$　　(4)　$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

4　次の式を因数分解せよ．

(1)　$6x^2-x-2$　　(2)　$8a^3-27b^3$

(3)　$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)-9$　　(4)　x^4+3x^2-4

5　次の式を簡単にせよ．

(1)　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}$　　(2)　$\sqrt{12-6\sqrt{3}}$

6　次の x についての不等式を解け．

(1)　$\dfrac{1}{2}x+1\geqq\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{6}$　　(2)　$\dfrac{2x-1}{3}<\dfrac{x+6}{2}\leqq\dfrac{3x+7}{4}$

(3)　$ax<1$　　(4)　$ax>1$

7　次の方程式・不等式を解け．

(1)　$|x-2|=4$　　(2)　$|x+1|\leqq3$

(3)　$|2x-1|>4$　　(4)　$|x+1|=3x$

＜ Note ＞

第１講　数と式・方程式・不等式

1　次の式を因数分解せよ．

(1)　$xy-yz+x^2-zx$

(2)　$x^2-4xy+3y^2+x-5y-2$

(3)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

＜ Note ＞

2 ［1］ ⑴ $-1<a<3$，$2<b<5$ のとき，次の値の範囲を求めよ．

（i） $\dfrac{3a-5}{2}$ （ii） $a+b$ （iii） $2a-3b$

⑵ $4x-3a<-2$ を満たす x の最大の整数が 5 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

［2］ 不等式 $|x+1|+|x-3|<4x$ を解け．

< Note >

3 ［1］ ⑴ $x=1+\sqrt{3}$，$y=1-\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(i) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　　(ii) x^2+y^2　　(iii) x^3+y^3

⑵ $x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$x>1$ とする．

(i) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(ii) $x-\dfrac{1}{x}$　　(iii) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$

［2］ 次の x についての方程式，不等式を解け．

⑴ $||x-4|-3|=2$

⑵ $ax<x+b$

< Note >

第1講　数と式・方程式・不等式

(1)　$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$ を因数分解すると

$(x-$ ア $y+$ イ $)(x+$ ウ $y-$ エ $)$となる．

(2)　$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=5+\sqrt{24}$ のとき，$x^2+y^2=$ オカ ，$x^3+y^3=$ キクケ である．

(3)　x についての不等式 $2x+4a>3x+a$ を満たす自然数の個数が2個となるような整数 a は $a=$ コ である．

＜ Note ＞

第２講　２次関数(1)

【基礎確認事項】

［１］　関数

□２つの変数 x，y について，x の値を定めると y の値がただ１つ定まるとき，y は x の**関数**であるという．x の関数を $\boldsymbol{f(x)}$，$g(x)$ などと表す．

例　x の関数 $2x+1$ を $f(x)=2x+1$ と表し，この場合の関数 $f(x)$ は，x の値を定めると，それを２倍して１を加えた値に対応させる．

□y が x の関数であることを，$\boldsymbol{y=f(x)}$ などと表す．つまり，関数 $f(x)$ によって定められた値を y とする，ということである．

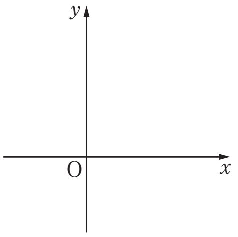
例　$f(x)=2x+1$ のとき，$y=f(x)$ とは $y=2x+1$ を表す．

もちろん，y 以外の文字（変数）に関数を対応させることもできる．

□関数 $f(x)$ において $x=t$ に対応する値を $f(t)$ とかき，関数を表す式の x に t を代入することでその値を求めることができる．

例　$f(x)=2x+1$ において $f(2)=2\cdot2+1=5$ である．

□平面上に，右図のように直交する２本の数直線をとる．その交点Ｏを**原点**といい，２本の数直線を**座標軸**という．



□座標軸は，横軸を x 軸，縦軸を y 軸と名付けることが多く，この場合は，横軸に変数 x の値を，縦軸に変数 y の値を対応させる．

□また，両軸を矢印で表すことにより，正の向きを定める．x 軸の正の向きを $\boldsymbol{x}$ **軸方向**という．$\boldsymbol{y}$ **軸方向**も同様である．

□あるグラフを，その形を変えずに一定の向きに一定の距離だけ動かすことを，そのグラフを**平行移動**する，という．関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後のグラフを表す式は $y-q=f(x-p)$，すなわち

$$y=f(x-p)+q$$

となる．これは「図形と方程式」における「軌跡」第 23 講［１］の考え方で導くことができる．この結果は x の関数 $f(x)$ の x に $x-p$ を代入し，さらに q を加えた式となる．

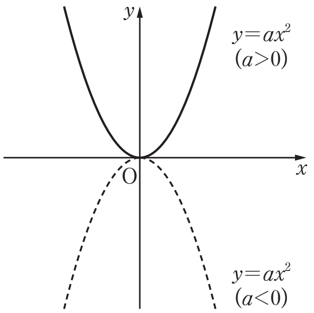
例　$y=2x+1$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 平行移動したグラフは，
$y=2(x-2)+1+3$　つまり $y=2x$ で表される．

関数 $\boldsymbol{y=f(x)}$ の平行移動

$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した式は

$$y=f(x-p)+q$$

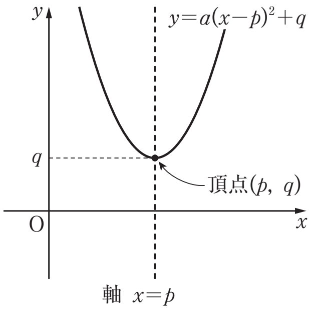
［２］　２次関数とそのグラフ



□ x の関数が 2 次式で表されるとき，この関数を x の **2 次関数**という．

□ 2 次関数 $y=ax^2$ のグラフは，y 軸に関して対称な放物線である．放物線には対称の軸が存在し，これを放物線の**軸**という．また，軸と放物線との交点を放物線の**頂点**という．$y=ax^2$ のグラフの頂点は原点である．

□ $a>0$ のとき**下に凸**であるといい，$a<0$ のとき**上に凸**であるという．



□ 2 次関数 $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後のグラフを表す式は

$$y=a(x-p)^2+q$$

となる．このとき

グラフの軸は $x=p$，頂点は $(p,\ q)$

である．

例　関数 $y=-2(x+1)^2-3$ のグラフは，$y=-2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 平行移動したものであり，その軸は $x=-1$，頂点は $(-1,\ -3)$ である．

□ 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することで，その軸や頂点がわかる．x の 2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを**平方完成**するという．

例

$$
\begin{aligned}
y&=2x^2+3x+4\\
&=2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)+4\\
&=2\left\{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+4\\
&=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+4\\
&=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}
\end{aligned}
$$

（x^2 の係数でくくる．）
（x の係数を半分にし，2 乗でくくる．さらに，半分にした値の 2 乗を引く．）
（x^2 の係数を分配）
（定数項をまとめる．）

軸：$x=-\dfrac{3}{4}$　頂点 $\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{23}{8}\right)$

$$
\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

軸：$x=-\dfrac{b}{2a}$　頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

> 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線であり，その軸は $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ である．

⇒　C&U 1

［３］　２次関数の移動

□２次関数のグラフは，x^2 の係数とその頂点によって１つに定まる．一般的には２次関数のグラフの移動は，x^2 の係数と頂点の座標に注目するとよい．

□軌跡の考え方を用いると，先に述べた平行移動に加え，対称移動について以下のことが成り立つ．

関数 $y=f(x)$ のグラフを対称移動した式は

x 軸対称：$-y=f(x)$　　y 軸対称：$y=f(-x)$　　原点対称：$-y=f(-x)$

⇒　C&U ②

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　次の 2 次関数のグラフの軸の方程式と頂点の座標を求めよ．また，そのグラフをかけ．

(1)　$y=x^2+2x+3$　　(2)　$y=-2x^2+2x-1$　　(3)　$y=\frac{1}{3}x^2-x-6$

2　放物線 $y=2x^2-4x$ のグラフを次のように移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

(1)　x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 平行移動

(2)　x 軸に関して対称に移動

(3)　y 軸に関して対称に移動

(4)　原点に関して対称に移動

< Note >

第2講　2次関数(1)

1 (1) 放物線 $y=-2x^2+3x-4$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 平行移動した放物線の方程式を求めよ．

(2) ある放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 平行移動すると放物線 $y=3x^2-6x+4$ に重なった．定数 a，b，c の値を求めよ．

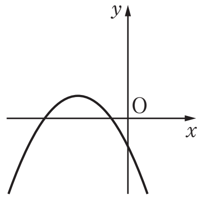
< Note >

2　放物線 $y=2x^2-x+3$ を次の点や直線に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ.

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点　　(4)　直線 $x=1$

< Note >

3　右図は2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである．次の値の符号を調べよ．



(1)　a　　(2)　c

(3)　b　　(4)　$a+b+c$

(5)　b^2-4ac

＜ Note ＞

第２講　２次関数(1)

(1)　放物線 $y=x^2-2x+3$ の頂点の座標は(ア , イ)であり，この放物線のグラフを x 軸方向に ウ ，y 軸方向に エ 平行移動すると放物線 $y=x^2-6x+14$ のグラフと重なる．

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に4平行移動し，さらに原点に関して対称に移動すると，放物線 $y=-x^2-6x-11$ となるとき，$a=$ オ ，$b=$ カ ，$c=$ キ である．

＜ Note ＞

第３講　２次関数(2)

【基礎確認事項】

［1］　２次関数の最大・最小

□y が x の関数であるとき，変数 x のとり得る値の範囲をこの関数の**定義域**といい，このときの y のとり得る値の範囲をこの関数の**値域**という．

□関数の値域に最大の値があるとき，その値を関数の**最大値**といい，最小の値があるとき，その値を関数の**最小値**という．

□一般的に，変数のとり得る値の範囲をその変数の**変域**という．

□２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小について考える．

定義域がすべての実数のとき

$a>0$ ならば，グラフは下に凸であり，

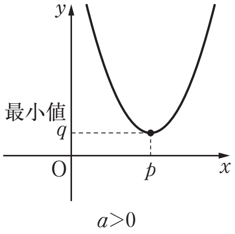
最小値は q，最大値はなし

$a<0$ ならば，グラフは上に凸であり，

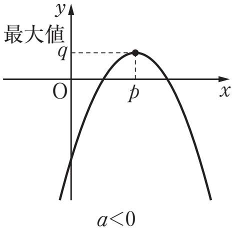
最小値はなし，最大値は q

つまり，最大値・最小値は軸でとり，

その値は頂点の y 座標である．



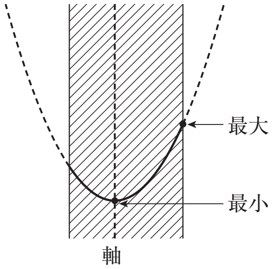
$a>0$



$a<0$

定義域に制限があるときは，グラフで考える．

その際，軸と定義域の位置関係に注意するとよい．



⇒　C&U ① ②

［2］　２次関数の決定

□与えられた条件を満たす２次関数を求める場合は，その条件によって最初におく式を工夫するとよい．

> １．最大値や最小値，軸や頂点が与えられた場合は　$y=a(x-p)^2+q$　とおく
> ２．グラフが通る３点の座標が与えられた場合は　$y=ax^2+bx+c$　とおく
> ３．グラフと x 軸との２交点の座標が与えられた場合は　$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$　とおく

が主な方針である．３．については第４講［2］の「２次関数のグラフと x 軸の位置関係」により導かれる．いずれの形も x^2 の係数 a は共通であり，注意すべきポイントとなる．

⇒　C&U ③

【CHECK & UP】

1　次の2次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ．また，値域を求めよ．

(1)　$y=x^2-3$　　(2)　$y=-\frac{1}{2}x^2-3x+4$

2　2次関数 $y=x^2-2x+2$ の次の定義域における最大値，最小値があればそれを求めよ．また，値域を求めよ．

(1)　$-1 \leqq x \leqq 2$　　(2)　$0<x<3$　　(3)　$0 \leqq x<2$

(4)　$2 \leqq x \leqq 4$　　(5)　$-2 \leqq x<0$

3　次の条件を満たす2次関数の式を求めよ．

(1)　頂点が $(1,\ 2)$ で，点 $(2,\ 5)$ を通る．

(2)　$x=2$ のとき最大値3をとり，点 $(0,\ -1)$ を通る．

(3)　最小値が -1 で，2点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$ を通る．

(4)　3点 $(-1,\ 7)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 11)$ を通る．

＜ Note ＞

第3講　2次関数(2)

1　(1)　$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)=x^2-2ax+3a^2$ の最小値 $m(a)$ を a の式で表せ.

(2)　$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)=x^2-2ax+3a^2$ の最大値 $M(a)$ を a の式で表せ.

< Note >

2 ［1］ 2 次関数 $f(x)=-x^2+6x-5$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ をそれぞれ a の式で表せ．

［2］ $x+y=3$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) $3x^2+2y^2$ の最小値を求めよ．

(2) $x\geqq 2$，$y\geqq -1$ のとき，$3x^2+2y^2$ の最大値，最小値を求めよ．

＜ Note ＞

3 (1)　放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 5)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ．

(2)　定義域を $-2\leqq x\leqq 1$ とする関数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ の最大値が 6，最小値が 3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

＜ Note ＞

第3講　2次関数(2)

2次関数 $y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$ のグラフの頂点の座標を a を用いて表すと，

$(a+$ ア $,\ -$ イ a^2+ ウ $a-$ エ $)$ である．この関数の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最小値は

$a<-$ オ のとき　カキ $a+$ ク

$-$ オ $\leqq a \leqq$ ケ のとき　$-$ イ a^2+ ウ $a-$ エ

ケ $<a$ のとき　コサ $a+$ シ

である．

< Note >

第4講　2次関数(3)

【基礎確認事項】

［1］　2次方程式の解の個数

□2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$b^2-4ac \geqq 0$ のとき　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である．

これは，$ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ より

$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0$　すなわち　$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$　から導くことができる．

□$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$ とおくと，次のことが成り立つ．

$D \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ
　$D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ
　$D=0 \iff$ 1つの実数解（重解）をもつ
$D<0 \iff$ 実数解をもたない

$D=0$ のとき，その重解は $x=-\dfrac{b}{2a}$ である．

この b^2-4ac を2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の**判別式**という．断りのない限り，今後 D は判別式を表すものとする．

□また，2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ であり，$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ とおくと，次のことが成り立つ．

$\dfrac{D}{4} \geqq 0 \iff$ 実数解をもつ
　$\dfrac{D}{4}>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ
　$\dfrac{D}{4}=0 \iff$ 1つの実数解（重解）をもつ
$\dfrac{D}{4}<0 \iff$ 実数解をもたない

$\dfrac{D}{4}=0$ のとき，その重解は $x=-\dfrac{b'}{a}$ である．

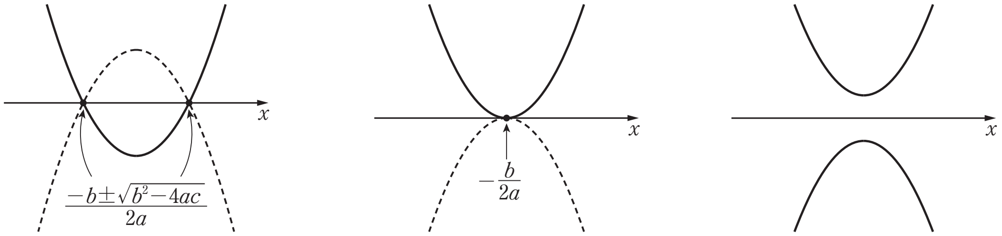
⇒　C&U ①

［2］　2次関数のグラフと x 軸の位置関係

□2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと直線 $y=0$，すなわち x 軸との共有点の x 座標に一致する．

□放物線の形状を考えるとき，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との位置関係は，x 軸との共有点の個数，すなわち2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数からわかる．

□$D=b^2-4ac$ とすると，位置関係は以下のように分類される．



(i)　$D>0$ のとき
異なる2点で交わる．
交点（共有点）は2個．
交点の x 座標は
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(ii)　$D=0$ のとき
共有点は1個．
接するという．
接点の x 座標は
$$x=-\frac{b}{2a}$$

(iii)　$D<0$ のとき
共有点をもたない．

⇒　C&U 2

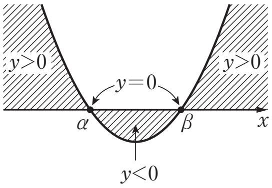
[3]　2次不等式のグラフによる解法

□前述のように，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと直線 $y=0$ すなわち x 軸との共有点の x 座標は，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解に一致する．このことを利用し，2次不等式を解くことを考える．

2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は
　$y=ax^2+bx+c$ のグラフの y 座標が正となる x の範囲であり，
2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は
　$y=ax^2+bx+c$ のグラフの y 座標が負となる x の範囲である．
これを，2次関数のグラフおよび x 軸との共有点の x 座標を用いて考える．

①　グラフが x 軸と異なる2つの交点をもつとき
交点の x 座標を α，β（$\alpha<\beta$）とする．

(i)　$a>0$ のとき



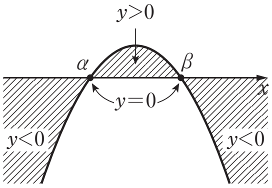
$x<\alpha$，$\beta<x$ においては　y 座標は正
$x=\alpha$，β においては　y 座標は0
$\alpha<x<\beta$ においては　y 座標は負

よって，以下のことがいえる．

> $a>0$ のとき
> 　2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$
> 　2次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

(ii)　$a<0$ のとき
$a>0$ のときと同様に考えると，以下のことがいえる．

> $a<0$ のとき
> 　2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は　$\alpha<x<\beta$
> 　2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は　$x<\alpha,\ \beta<x$



□$a<0$ のときの 2 次不等式は，両辺にマイナスを掛けることで，$a>0$ のときの 2 次不等式として考えることもできる．不等号の向きが逆転することに注意．

⇒　C&U 3

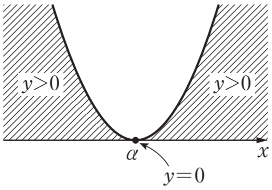
②　グラフが x 軸と接するとき

接点の x 座標を α とする．$a>0$ のときを考える．

$x<\alpha,\ \alpha<x$ においては　y 座標は正

$x=\alpha$ においては　y 座標は 0

y 座標が負となる x の値はない



よって，以下のことがいえる．

> $a>0$ のとき
> 　2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解は　$x<\alpha,\ \alpha<x$（α 以外のすべての実数）
> 　2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解は　ない
> 　2 次不等式 $ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　すべての実数
> 　2 次不等式 $ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　$x=\alpha$

□不等式に等号がついている場合は，$x=\alpha$ が解に含まれることに注意．

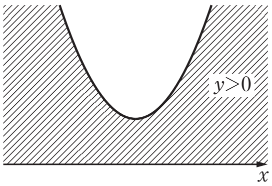
□また，$a<0$ の場合も同様にグラフで考えることができる．

⇒　C&U 4

③　グラフが x 軸と共有点をもたないとき

グラフより，以下のことがいえる．

> $a>0$ のとき
> 　2 次不等式 $ax^2+bx+c>0$ および $ax^2+bx+c\geqq 0$
> 　の解は　すべての実数
> 　2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ および $ax^2+bx+c\leqq 0$
> 　の解は　ない



□グラフと x 軸との共有点がないため，等号の有無にかかわらず解は同じである．

□また，$a<0$ の場合も同様にグラフで考えるとよい．

⇒　C&U 5

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　次の２次方程式の異なる実数解の個数を求めよ．

(1)　$x^2-5x+5=0$　　(2)　$2x^2-3x+3=0$　　(3)　$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

2　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係を調べよ．

(1)　$y=-3x^2+2x-1$　　(2)　$y=2x^2+4x+2$　　(3)　$y=2x^2-8x+5$

3　次の２次不等式を解け．

(1)　$2x^2-3x-2>0$　　(2)　$x^2-3x<0$

(3)　$x^2\geqq 5$　　(4)　$x^2+2x-2\leqq 0$

4　次の２次不等式を解け．

(1)　$x^2-6x+9>0$　　(2)　$x^2-6x+9\geqq 0$

(3)　$4x^2+4x+1<0$　　(4)　$4x^2+4x+1\leqq 0$

5　次の２次不等式を解け．

(1)　$x^2-x+3>0$　　(2)　$-2x^2+2x-3\geqq 0$

< Note >

第４講　２次関数(3)

1　(1)　次の 2 次関数のグラフと x 軸との共有点の座標を求めよ．

(i)　$y=-x^2+2x+3$　　(ii)　$y=2x^2-4x+2$　　(iii)　$y=4(x-1)^2-5$

(2)　放物線 $y=3x^2-4x-1$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3)　x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(3,\ -1)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

< Note >

2　関数 $y=mx^2+2mx+1$ ……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　①のグラフと x 軸との共有点の個数を調べよ．

(2)　①のグラフが x 軸と接するとき，その接点の座標を求めよ．

＜ Note ＞

3　(1)　x についての 2 次不等式 $x^2-(1-a)x-a>0$ を解け．

(2)　2 次不等式 $ax^2+bx+12>0$ の解が $-2<x<3$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

< Note >

第4講　2次関数(3)

放物線 $y=ax^2+4x+5-a$ ……①　のグラフと x 軸との共有点について調べる．
2次方程式 $ax^2+4x+5-a=0$ の判別式を D とすると，

$\dfrac{D}{4}=a^2-$ [ア] $a+$ [イ] である．よって，①のグラフが x 軸と2点で交わるのは，

$a<0$，$0<a<$ [ウ]，[エ] $<a$ のときである．また，①のグラフが x 軸と接するのは $a=$ [ウ]，[エ] のときであり，このときの接点の座標は，$a=$ [ウ] のとき

$(-$ [オ]，$0)$，$a=$ [エ] のとき $\left(-\dfrac{[カ]}{[キ]},\ 0\right)$ である．

< Note >

第５講　２次関数(4)

【基礎確認事項】

［1］　絶対不等式

□２次不等式の中にはその解が「すべての実数」となるものがあることは前の講で扱った．このように，すべての実数に対して成り立つ不等式を**絶対不等式**という．変域に制限がある場合については，変域内のすべての実数に対して成り立つ不等式が絶対不等式である．

□一般に，以下のことが成り立つ．

どんな実数 x に対しても

・　$ax^2+bx+c>0$ が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　$a>0$　かつ　$D<0$

・　$ax^2+bx+c<0$ が成り立つ　$\Longleftrightarrow$　$a<0$　かつ　$D<0$

⇒　C&U ①

［2］　２次方程式の解の配置

□２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が，与えられた範囲にあるための条件を考えるとき，その解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ を利用せず，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標を範囲内に配置する解法がある．

□２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解について

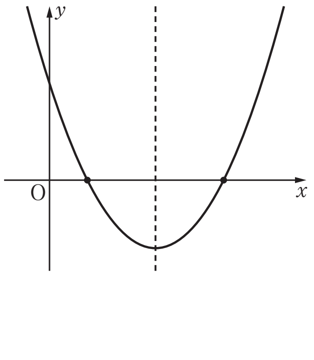
①　２解がともに $x>0$ の範囲にある

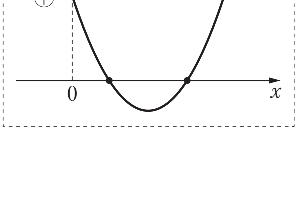
②　１解が正，もう１解が負である

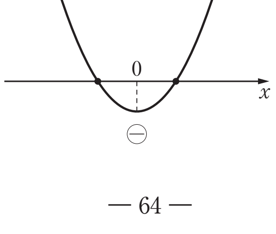
ときをそれぞれ考えよう．ここでは $a>0$ のときを考える．

$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ とおくと，グラフの軸は $x=-\dfrac{b}{2a}$ である．

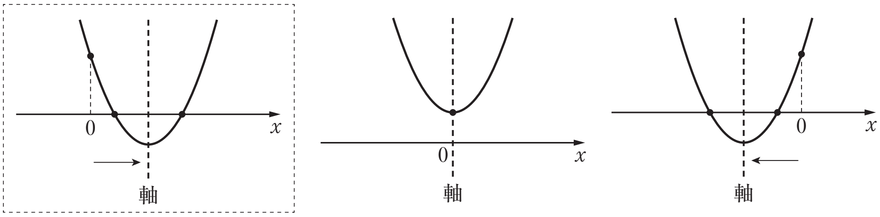
①のとき，$y=f(x)$ のグラフが右図のようになればよい．まずは，範囲の端（端点という）における y 座標の符号を見る．今回は範囲 $x>0$ の端点 $x=0$ における y 座標，すなわち $f(0)$ である．
図より $f(0)>0$ である．これが $f(0)=0$ や $f(0)<0$ になるとグラフと x 軸との共有点が２つとも$x>0$ になることがない．
これゆえ，$f(0)>0$ である．





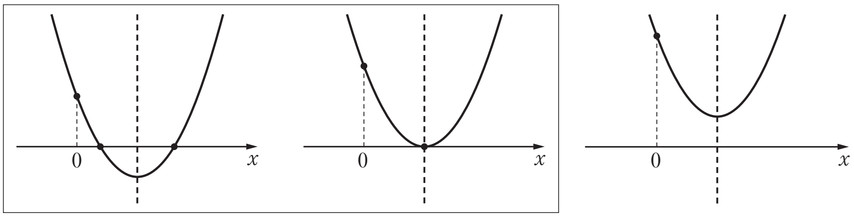


$f(0)>0$ の状態で，次に軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$ を考える．図より軸は $x>0$ の範囲にある．これが $x=0$ や $x<0$ の範囲にあると，グラフと x 軸との共有点が２つとも $x>0$ になることはない．よって，$-\dfrac{b}{2a}>0$ である．

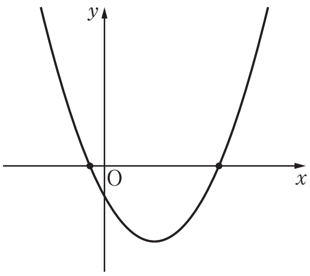


さらに，この状態で範囲内に解が２つあるための条件を考える．一般に方程式の「解が２つ」とは「重解」も含める．重解を含めないときは「異なる２解」と表す．重解をもつのは，グラフが x 軸と「接する」ときである．つまり，範囲内に解が２つあるのは，グラフが x 軸と「２点で交わる」または「接する」ときである．

$f(0)>0$ かつ軸 $-\dfrac{b}{2a}>0$ を満たしても，範囲内の共有点が「１つもない」ことがある．それは「$D<0$」のときである．つまり，最後の条件は $D>0$ または $D=0$，つまり $D\geqq 0$ である．



以上より，$f(0)>0$　かつ　$-\dfrac{b}{2a}>0$　かつ　$D\geqq 0$　であればよいことがわかる．



次に②のとき，$y=f(x)$ のグラフが右図のようになればよい．
先ほどと同様，端点における y 座標の符号を見る．
グラフより $f(0)<0$ である．これが $f(0)=0$ や $f(0)>0$ になると共有点の x 座標のうち１つが正，１つが負となることはない．
これゆえ，$f(0)<0$ である．

次に $f(0)<0$ の状態で，軸の位置を考える．上のグラフでは軸は $x>0$ の範囲にあるが，軸が $x=0$ や $x<0$ の範囲にあっても，共有点の x 座標のうち１つは正，１つは負である．よって軸の位置は条件に入れる必要がない．

さらに $f(0)<0$ を満たした状態で x 軸との共有点が１個や０個になることはない．これはグラフから明らかであろう．よって D の条件も必要がない．

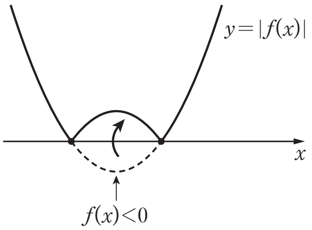
以上より，$f(0)<0$ であればよいことがわかる．

□方程式の解の配置の問題においては，その条件を満たす関数のグラフとしてその状態を調べ，必要な条件を導くことが有用な方法である．

> 2 次方程式の解の配置においては，必要に応じて
> ①　端点の y 座標の正負　　②　軸の位置　　③　判別式 D
> に注目するとよい．

⇒　C&U ②

［3］ $y=|f(x)|$ のグラフ



□絶対値の性質により

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geqq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

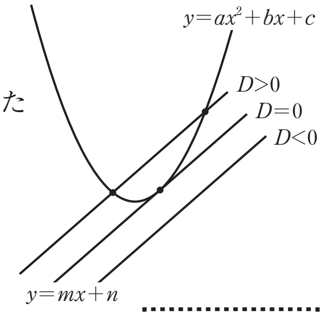
である．$f(x)\geqq 0$ とは関数 $y=f(x)$ のグラフで x 軸上および x 軸より上の部分であり，$f(x)<0$ とは $y=f(x)$ のグラフで x 軸より下の部分である．また，$y=-f(x)$ すなわち $-y=f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．

したがって，以下のことがいえる．

> $y=|f(x)|$ のグラフは
> $y=f(x)$ のグラフにおいて x 軸より下の部分を x 軸に関して折り返したもの

⇒　C&U ③

［4］ 放物線と直線の共有点



□放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ について，その共有点の x 座標はこの 2 式より y を消去して x について整理した 2 次方程式の実数解に一致する．この方程式が実数解をもたないときは，共有点がない．

□整理した 2 次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ の解は，放物線 $y=Ax^2+Bx+C$ と x 軸との共有点の x 座標を表している．その共有点の個数は，判別式 D の符号に応じて決まる．

⇒　C&U ④

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　すべての実数 x について　$x^2+(a-3)x+a>0$ が成り立つとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

2　2 次方程式　$x^2-2mx+m+2=0$ が $x>1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m のとり得る値の範囲を求めよ．

3　次の関数のグラフの概形をかけ．

(1)　$y=|x-3|$　　(2)　$y=|x^2-3x+2|$

4　放物線 $y=x^2-2x+1$ と直線 $y=2x-3$ の共有点の座標を求め，この 2 つのグラフを図示せよ．

< Note >

第５講　２次関数(4)

1　すべての実数 x に対して，$(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$　……①　が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

2　2次方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　①が $x=-2$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．

(2)　①が $-2<x<0$ に2解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(3)　①が $x<-2$ と $-2<x<0$ に1解ずつ解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(4)　①が $-2<x<0$ に少なくとも1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

＜ Note ＞

3 (1) x の方程式 $|x^2-x-2|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ.

(2) x の方程式 $|x^2-x-2|=2x+k$ の異なる実数解の個数を求めよ.

< Note >

第５講　２次関数(4)

2 次方程式 $x^2+ax+2a=0$ が $-1<x<1$ に少なくとも 1 解をもつときの a の値の範囲を求めたい．$f(x)=x^2+ax+2a$ とおくと，$f(x)$ のグラフの軸は直線 $x=-\dfrac{a}{\boxed{\text{ア}}}$ である．また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると $D=a(a-\boxed{\text{イ}})$ である．さらに $f(-1)=a+\boxed{\text{ウ}}$，$f(1)=\boxed{\text{エ}}a+1$ である．$f(x)=0$ が $-1<x<1$ に 2 つの解（重解を含む）をもつのは $-\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}<a\leqq\boxed{\text{カ}}$ のときである．また，$-1<x<1$ の範囲に 1 解のみもち，もう 1 解は $x<-1$ または $1<x$ の範囲にあるのは

$-\boxed{\text{キ}}<a<-\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}$ のときである．さらに，$x=1$ を解にもつとき $a=-\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，このときもう 1 解は $x=-\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．$x=-1$ を解にもつとき

$a=-\boxed{\text{キ}}$ であり，このときもう 1 解は $x=\boxed{\text{コ}}$ である．以上より，求める a の範囲は $-\boxed{\text{キ}}<a\leqq\boxed{\text{カ}}$ となる．

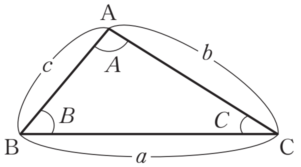
< Note >

第６講　三角比(1)

【基礎確認事項】

［１］　三角比

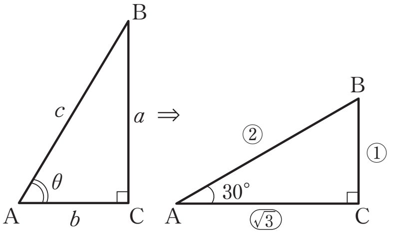
以下では，三角形ABC において，
辺の長さについて　BC＝a，CA＝b，AB＝c
角の大きさについて　∠A＝A，∠B＝B，∠C＝C
と表すこととする．



$A=\theta$，$C=90^\circ$ の直角三角形について考える．

□θ の大きさを決めると B の大きさも決まり，これにより 3 辺の長さ a，b，c の比が定まる．

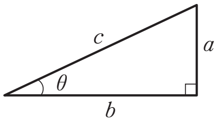
例　$\theta=30^\circ$ と定めると
$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$ と定まる．



□θ の大きさに対する $\dfrac{a}{c}$，$\dfrac{b}{c}$，$\dfrac{a}{b}$ の値をそれぞれ θ の**正弦**（サイン sine），**余弦**（コサイン cosine），**正接**（タンジェント tangent）といい，それぞれ $\boldsymbol{\sin\theta}$（サイン θ），$\boldsymbol{\cos\theta}$（コサイン θ），$\boldsymbol{\tan\theta}$（タンジェント θ）と表す．

例　$\theta=30^\circ$ とすると，$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

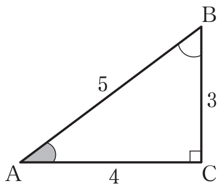
正弦 $\sin\theta=\dfrac{a}{c}$　　余弦 $\cos\theta=\dfrac{b}{c}$　　正接 $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$



□正弦，余弦，正接をあわせて**三角比**という．三角比の値を表す際には，比の意味合いから分母の有理化は必ずしも必要とはしない．

□また，3 辺の長さ a，b，c のうち 2 辺の長さを決めると，三平方の定理により残り 1 辺の長さが決まり，それによって A の三角比が定まる．

例　$a=3$，$b=4$ のとき $c=5$ であり，
$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\tan A=\dfrac{3}{4}$　である．
またこのとき，同様に B の三角比が定まり，
$\sin B=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，$\tan B=\dfrac{4}{3}$ である．

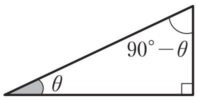


□$B=90^\circ-A$ より，$90^\circ-\theta$ の三角比について以下のことがいえる．

$$\sin\theta=\frac{a}{c}=\cos(90^\circ-\theta),\ \cos\theta=\frac{b}{c}=\sin(90^\circ-\theta),\ \tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{1}{\tan(90^\circ-\theta)}\quad より$$

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$



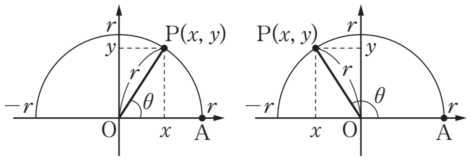
⇒　C&U 1

［２］ 三角比の拡張

□座標平面上に原点 O を中心とする半径 r の半円を描き，$A(r,\ 0)$ とする．また，円周上の点を $P(x,\ y)$，$\angle POA=\theta$ とする．このとき，θ の三角比を次のように定義する．

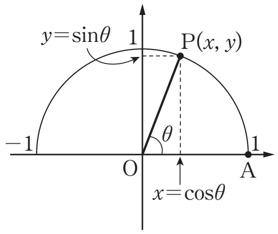
$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$　　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$　　$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

ただし，$\theta=90^\circ$ のときは $\tan\theta$ は定義されない．



□また，このことより $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ である．

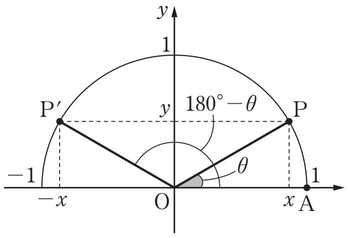
□$r=1$ のとき，上の円は原点中心，半径１の円（単位円）となり，三角比の定義は以下のようになる．



$\sin\theta=y$　　$\cos\theta=x$　　$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

つまり単位円の円周上に右上図のように $\angle AOP=\theta$ となる点 $P(x,\ y)$ をとると，その x 座標が $\cos\theta$ の値であり，y 座標が $\sin\theta$ の値である．

□また，点 P と y 軸に関して対称な点 P′ をとると，図形の対称性より P′ も単位円上にある．また，$\angle AOP'=180^\circ-\theta$ である．



$\sin\theta=y,\ \sin(180^\circ-\theta)=y$

$\cos\theta=x,\ \cos(180^\circ-\theta)=-x$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x},\ \tan(180^\circ-\theta)=-\dfrac{y}{x}$　であることより

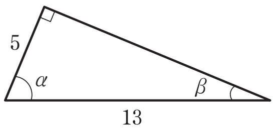
$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$　　$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$　　$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta$

である．

⇒　C&U 2 3

【CHECK & UP】

1　右の図の直角三角形について，次の値を求めよ．

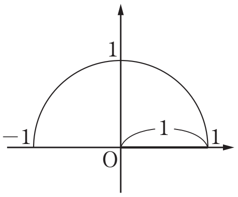


(1)　$\sin\alpha$　　(2)　$\cos\alpha$　　(3)　$\tan\alpha$

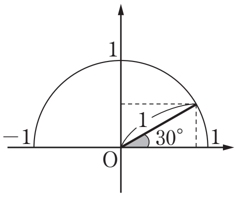
(4)　$\sin\beta$　　(5)　$\cos\beta$　　(6)　$\tan\beta$

2　図を参考にして，θ が次の角度のときの $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

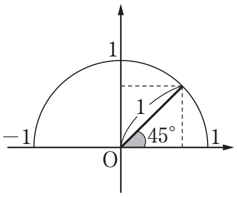
(1)　0°



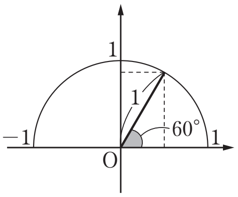
(2)　30°



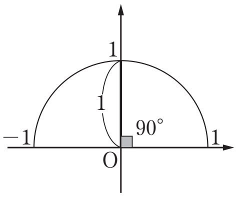
(3)　45°



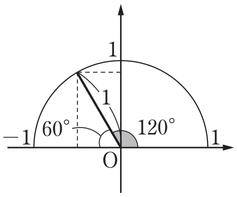
(4)　60°



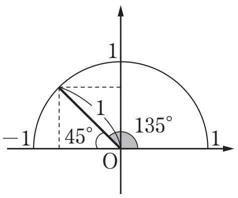
(5)　90°



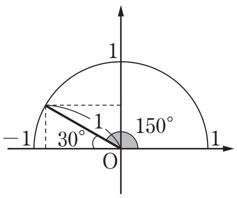
(6)　120°



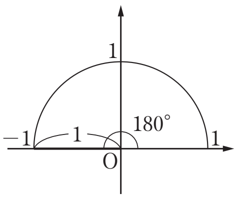
(7)　135°



(8)　150°



(9)　180°



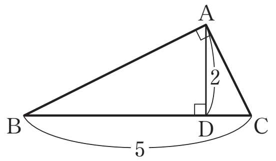
3　次の三角比を 0° から 45° の三角比で表せ．

(1)　$\sin 105°$　　(2)　$\cos 110°$　　(3)　$\tan 155°$

＜ Note ＞

第６講　三角比(1)

1 ［1］　右図のような直角三角形 ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を D とする．$AB>AC$，$BC=5$，$AD=2$ とするとき，$\sin B$，$\cos B$ の値を求めよ．



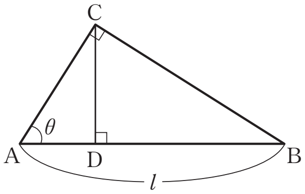
［2］　$\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC で，$\sin A=\dfrac{2}{3}$ のとき，次の三角比の値を求めよ．

(1)　$\cos A$，$\tan A$　　　(2)　$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$

＜ Note ＞

2 ［1］　1辺の長さが8である正五角形の対角線の長さを求めよ．ただし，必要ならば $\cos 36^\circ = 0.8090$ を用いよ．

［2］　$C = 90^\circ$ の直角三角形ABCにおいて，頂点Cから辺ABに下ろした垂線と辺ABとの交点をDとする．$\mathrm{AB} = l$，$\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とするとき，次の長さを l，θ を用いて表せ．



(1)　AC　　(2)　BC　　(3)　AD　　(4)　CD

＜ Note ＞

3 ［1］ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．t が次の値をとるとき，$\sin\theta = t$ を満たす θ の値を求めよ．

(1) $t=0$　(2) $t=\dfrac{1}{2}$　(3) $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(5) $t=1$

［2］ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．s が次の値をとるとき，$\cos\theta = s$ を満たす θ の値を求めよ．

(1) $s=0$　(2) $s=\dfrac{1}{2}$　(3) $s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(4) $s=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(5) $s=1$

(6) $s=-\dfrac{1}{2}$　(7) $s=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(8) $s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(9) $s=-1$

< Note >

第６講　三角比(1)

(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$，$\tan\theta = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

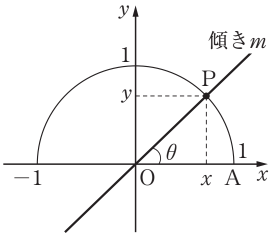
(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は $\theta = \boxed{\text{キク}}^\circ$，$\boxed{\text{ケコサ}}^\circ$ である．また，$\theta = \boxed{\text{ケコサ}}^\circ$ のとき $\cos\theta$ の値は $-\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

< Note >

第７講　三角比(2)

【基礎確認事項】

［１］　正接の値と直線の傾き

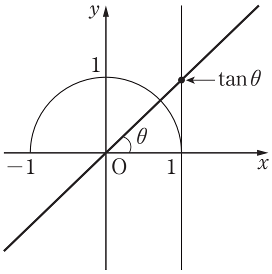


□右図のように，原点を通る傾き m の直線と単位円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$（$\theta\neq 90^\circ$）とする．

傾き $m=\dfrac{y}{x}$ および $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ より

> 直線 $y=mx$ と x 軸の正方向とのなす角 θ について
> $\tan\theta=m$

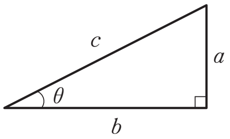
が成り立つ．m は傾きであり，x 座標が１増加したとき y は m 増加することより，$\tan\theta$ の値は直線 $y=mx$ と直線 $x=1$ との交点の y 座標に一致する．



⇒　C&U ①②

［２］　三角比の相互関係

□右の直角三角形において，



$$\sin\theta=\frac{a}{c}\text{ より }\quad a=c\sin\theta \qquad \cos\theta=\frac{b}{c}\text{ より }\quad b=c\cos\theta$$

である．

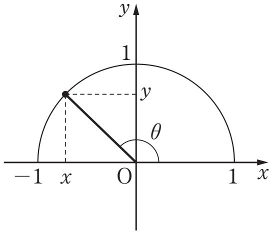
ここで，三平方の定理より　$a^2+b^2=c^2$　であるので

$$(c\sin\theta)^2+(c\cos\theta)^2=c^2 \quad\text{つまり}\quad c^2(\sin\theta)^2+c^2(\cos\theta)^2=c^2$$

よって　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　である．

また，$\tan\theta=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c\sin\theta}{c\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　である．

□同様に，右の単位円において



$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ であり，三平方の定理より

$x^2+y^2=1^2$　であるから　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$　である．

また，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　である．

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ることにより

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　　つまり　$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　が成り立つ．

以上より，次の三角比の相互関係が成り立つ．

> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

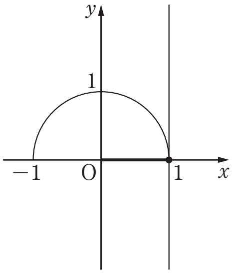
⇒　C&U ③

〈 Memo 〉

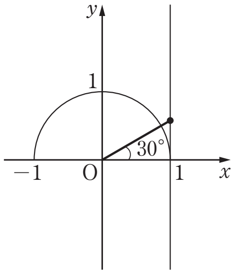
【CHECK & UP】

1　図を参考にして，θ が次の角度のときの $\tan\theta$ があればその値を求めよ．

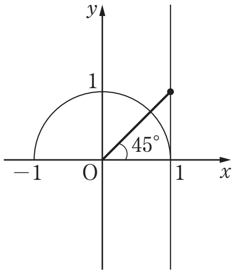
(1)　0°



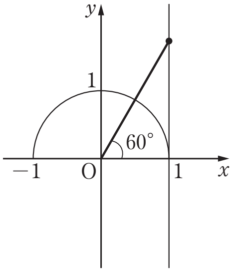
(2)　30°



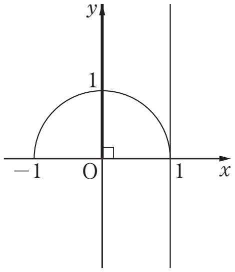
(3)　45°



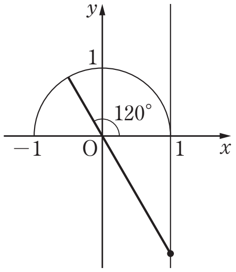
(4)　60°



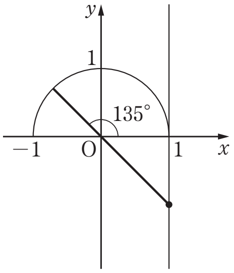
(5)　90°



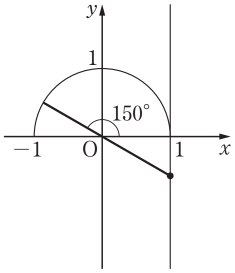
(6)　120°



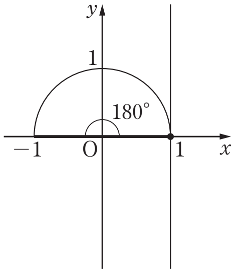
(7)　135°



(8)　150°



(9)　180°



2　直線 $y=\sqrt{3}x+1$ と x 軸の正の方向とのなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ．

3　(1)　$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ を満たす鈍角 θ について，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\tan\theta=-2$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

第７講　三角比(2)

1　[1]　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．t が次の値をとるとき，$\tan\theta = t$ を満たす θ の値を求めよ．

(1)　$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(2)　$t = 1$　(3)　$t = \sqrt{3}$　(4)　$t = -\sqrt{3}$

(5)　$t = -1$　(6)　$t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(7)　$t = 0$

[2]　2 直線 $y = x - 1$ と $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 2$ のなす鋭角を求めよ．

＜ Note ＞

2　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1)　$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき $\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

< Note >

3　$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3)　$\sin\theta-\cos\theta$　　(4)　$\sin\theta$，$\cos\theta$

< Note >

第７講　三角比(2)

(1)　2 直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$ と $y=-x-3$ のなす鋭角は $\boxed{\text{アイ}}$ °である.

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき $\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}}$,

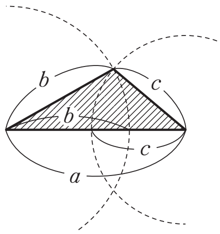
$\cos\theta=-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}$ である.

＜ Note ＞

第8講　三角比と平面図形(1)

【基礎確認事項】

[1]　三角形の辺と角



□三角形の 3 辺の長さについて，次のことが成り立つ．

2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さよりも大きい．

つまり，3 辺の長さ a，b，c について，次の関係が成り立つ．

$b+c>a$,　　$c+a>b$,　　$a+b>c$

□第 2 式より　$a>b-c$ であり，第 3 式より　$a>c-b$ である．

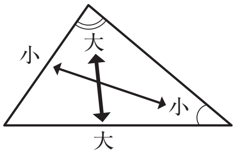
よって以下のことがいえる．

> a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在する条件は　$|b-c|<a<b+c$

つまり，三角形のある 1 辺は，他の 2 辺の長さの差より大きく，和よりも小さい．

また，a が最大辺の場合は，その長さは他の 2 辺の差より大きいことは当然であるため，三角形の成立条件は $a<b+c$ のみとなる．

□三角形の辺と角の大小関係について，以下のことがいえる．



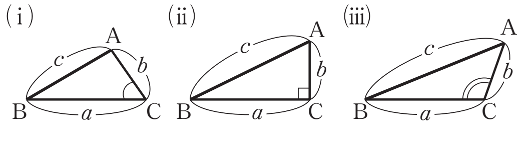
> 三角形においては 2 辺の大小関係とその対角 2 つの大小関係が一致する．

このことより，

> 鈍角三角形においては，鈍角の対辺が最大辺であり，最大辺の対角が鈍角である．

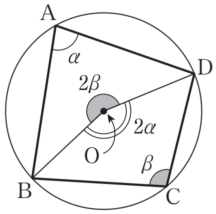
さらに，三角形の辺と角の関係について，以下のことがいえる．

> (i)　$a^2+b^2>c^2 \iff \angle C$ は鋭角
> (ii)　$a^2+b^2=c^2 \iff \angle C$ は直角
> (iii)　$a^2+b^2<c^2 \iff \angle C$ は鈍角



⇒　C&U 1

[2]　円の性質と正弦定理



□右図において，$\angle BAD=\alpha$，$\angle BCD=\beta$ とすると，

円の中心角は円周角の 2 倍であるので　$2\alpha+2\beta=360^\circ$

よって　$\alpha+\beta=180^\circ$　である．つまり，円に内接する四角形の内角の和は 360° である．

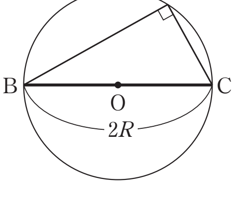
□三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の**外接円**，中心を**外心**という．

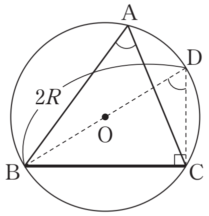
□△ABC の外接円の半径を R とする．

$A=90^\circ$ のとき

BC は円の直径より

$a=2R$ である．



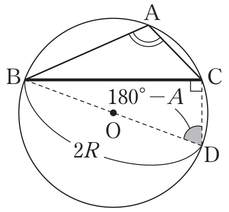


$0° < A < 90°$ のとき

右図のように頂点 B を通る直径 BD を考えると

$\angle \mathrm{BCD} = 90°$，$\mathrm{BD} = 2R$，$\angle \mathrm{D} = \angle \mathrm{A}$ より

$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} \sin D$　つまり　$a = 2R \sin A$　である．



$90° < A < 180°$ のとき

右図のように頂点 B を通る直径 BD を考えると

$\angle \mathrm{BCD} = 90°$，$\mathrm{BD} = 2R$，$\angle \mathrm{D} = 180° - \angle \mathrm{A}$ より

$\sin D = \sin(180° - A) = \sin A$

よって　$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} \sin D$　つまり　$a = 2R \sin A$　である．

$\sin 90° = 1$ より，$A = 90°$ のときも　$a = 2R \sin A$ と表せる．

以上より，△ABC の外接円の半径を R とすると　$a = 2R \sin A$　すなわち

$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$　が成り立つ．B，C についても同じように考えると，任意の △ABC について次の公式が成り立つ．

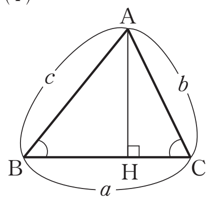
正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

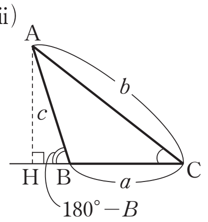
⇒　**C&U** ②

［３］　余弦定理

（ⅰ）



（ⅱ）



□△ABC において，

$a = c \cos B + b \cos C$　……①　が成り立つ．

これは右図において

（ⅰ）のとき　$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} \cos B + \mathrm{AC} \cos C$

（ⅱ）のとき　$\mathrm{BC} = \mathrm{CH} - \mathrm{HB} = \mathrm{AC} \cos C - \mathrm{AB} \cos(180° - B) = \mathrm{AC} \cos C + \mathrm{AB} \cos B$

より導かれる．

同様に　$b = a \cos C + c \cos A$　……②　　$c = a \cos B + b \cos A$　……③　が成り立つ．

$\angle A = 90°$ の直角三角形のときは，三平方の定理により　$a^2 = b^2 + c^2$　が成り立つ．

□ここでは一般の三角形について考えよう．

①×a より　$a^2 = ac \cos B + ab \cos C$

②×b＋③×c より　$b^2 + c^2 = (ab \cos C + bc \cos A) + (ac \cos B + bc \cos A)$

$= ac \cos B + ab \cos C + 2bc \cos A$

よって　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$　が成り立つ．また，この式より　$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

が成り立つ．B，C についても同じように考えると，任意の △ABC について次の公式が成り立つ．

余弦定理

$\triangle$ABC において

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \iff \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \iff \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \iff \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

⇒ C&U 3

[4]　三角形の面積

□$\triangle$ABC において，2 辺の長さとそれらにはさまれる角の大きさがわかると，その面積を求めることができる．

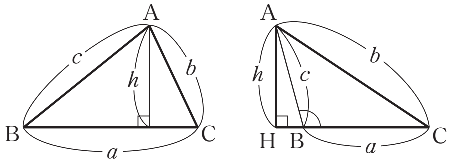
辺 BC を底辺とするときの高さ h は

$$h=c\sin B$$

となる．よって，$\triangle$ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h=\frac{1}{2}ac\sin B$$

となる．一般に，次の公式が成り立つ．



$\triangle$ABC の面積 S

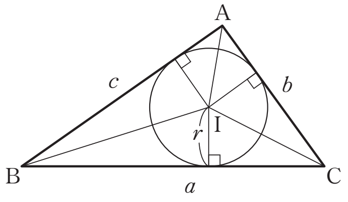
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \qquad S=\frac{1}{2}ca\sin B \qquad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

□三角形の 3 辺すべてに接する円を，その三角形の**内接円**，中心を**内心**という．

□右の図のように $\triangle$ABC の内心を I，内接円の半径を r とすると，円の半径と接線はその接点において直交することにより，三角形の面積は

$$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{IBC}+\triangle \mathrm{ICA}+\triangle \mathrm{IAB}$$
$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

となる．したがって，次のことが成り立つ．



$\triangle$ABC の内接円の半径 r と面積 S について

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

また，$a+b+c=2s$ とすると

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　（**ヘロンの公式**）が成り立つ．

⇒ C&U 4

【CHECK & UP】

1　次の長さの線分を3辺とする三角形は存在するかどうかを調べよ．また存在する場合は，その三角形が鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか答えよ．

(1)　3，4，6　　(2)　9，10，12

(3)　5，12，13　　(4)　5，10，16

2　△ABC において，外接円の半径を R とする．次のものを求めよ．

(1)　$a=4$，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$ であるとき，b および R

(2)　$a=5\sqrt{3}$，$R=5$ のとき　A

3　△ABC において，次のものを求めよ．

(1)　$a=3$，$b=5$，$C=120^\circ$ のとき　c

(2)　$a=1$，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{2}$ のとき　B

(3)　$a=4$，$b=\sqrt{13}$，$B=60^\circ$ のとき　c

4　次の △ABC の面積を求めよ．

(1)　$b=5$，$c=8$，$A=30^\circ$　　(2)　$a=7$，$b=5$，$c=3$

＜ Note ＞

第８講　三角比と平面図形(1)

1　△ABC において BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ のとき，最大角の大きさを求めよ．

(2)　次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ．

$$(a-c\cos B)\sin B=(b-c\cos A)\sin A$$

< Note >

2　鋭角三角形 ABC において BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とする．$a=\sqrt{3}$，$b:c=(1+\sqrt{3}):2$，外接円の半径が 1 であるとき，b，c の値および角 A，B，C の大きさを求めよ．

< Note >

3 ［1］　△ABC において，$AB=7$，$BC=4\sqrt{2}$，$CA=5$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　△ABC の面積 S を求めよ．

(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ．

［2］　円 O に内接する四角形 ABCD において，$AB=2$，$BC=3$，$CD=1$，$\angle ADC=120^\circ$ を満たす．このとき次の問いに答えよ．

(1)　AC の長さを求めよ．

(2)　AD の長さを求めよ．

(3)　円 O の半径を求めよ．

(4)　四角形 ABCD の面積を求めよ．

< Note >

第8講　三角比と平面図形(1)

円 O に内接する四角形 ABCD において，BC＝8，CD＝5，DA＝3，∠BCD＝60° である．このとき，BD＝［ア］，AB＝［イ］，円 O の半径は $\dfrac{［ウ］\sqrt{［エ］}}{［オ］}$ である．

また △ABD の内接円の半径を r とすると，$r=\dfrac{\sqrt{［カ］}}{［キ］}$ である．

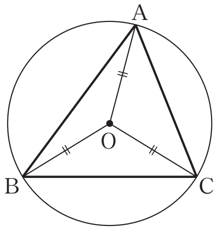
＜ Note ＞

第9講　三角比と平面図形(2)

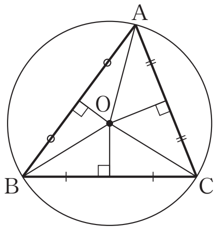
【基礎確認事項】

［1］　三角形の外接円と弦の垂直二等分線

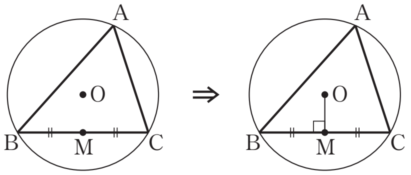
□ △ABC の外心を O とすると，OA＝OB＝OC より，
△OAB，△OBC，△OCA は二等辺三角形であり，
O は弦 BC，弦 CA，弦 AB の垂直二等分線の交点である．
すなわち，次のことがいえる．



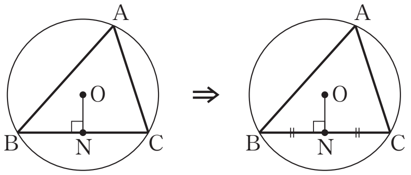
> 三角形の**外心**は，**3辺(3弦)の垂直二等分線の交点**である．



□また，これに関連して
・弦 BC の中点を M とすると，OM⊥BC



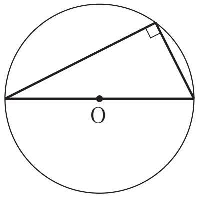
・O から弦 BC に垂線を下ろし，その交点を N とすると，N は弦 BC の中点



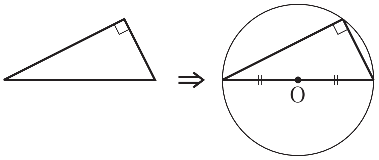
といったことがわかる．他の弦に関しても同様である．

［2］　三角形の外接円と弦の垂直二等分線

□円において，その半円の弧に対する円周角は 90° である．
そのことから，以下のことがいえる．



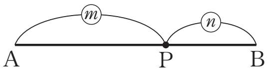
> 直角三角形の斜辺は，その三角形の外接円の直径に等しく，斜辺の中点は外接円の中心に等しい．



□［1］［2］の知識はいずれも「直角三角形」が絡み，それゆえ三角比の問題とのつながりが深い．三角形の辺が，その外接円の「弦」や「直径」になることに注意．

⇒　C&U ①

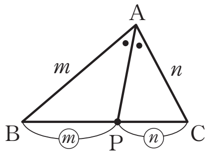
［2］ 内分・外分と角の二等分線



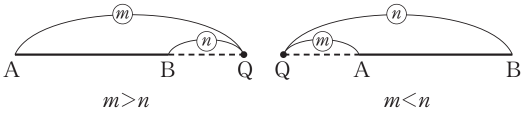
□$m>0$，$n>0$ とする．線分 AB 上の点 P が AP：PB＝m：n を満たすとき，点 P は線分 AB を m：n に**内分**するという．

□三角形の内角の二等分線について，次のことが成り立つ．

> △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交点 P について
> **BP：PC＝AB：AC**
> つまり，P は BC を AB：AC に内分する．

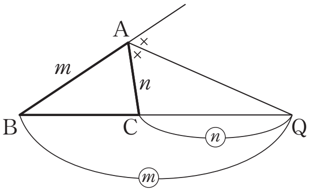


□$m\neq n$ とする．線分 AB の延長上の点 Q が AQ：QB＝m：n を満たすとき，点 Q は線分 AB を m：n に**外分**するという．



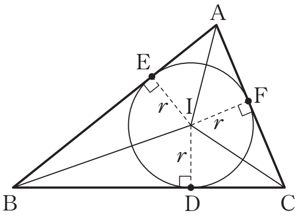
□三角形の外角の二等分線について，次のことが成り立つ．

> △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点 Q について
> **BQ：QC＝AB：AC**
> つまり，Q は BC を AB：AC に外分する．



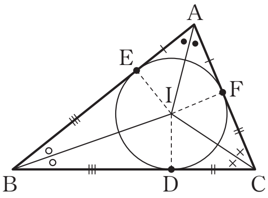
⇒　C&U ②

［3］ 三角形の内接円と角の二等分線



□ △ABC の内心を I とし，右図の接点 D，E，F について，△AEI≡△AFI，△BDI≡△BEI，△CDI≡△CFI であり，I は A，B，C の角の二等分線の交点である．
すなわち，次のことがいえる．

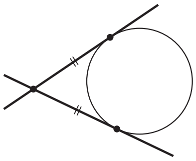
> **三角形の内心は，3 つの内角の二等分線の交点**である．



□一般に，円の外部から接線を引くとき，その点と接点までの距離を**接線の長さ**という．

□接線は 2 本引くことができ，上図において AE＝AF，BD＝BE，CD＝CF である．
つまり，

> 円の外部から引いた**2 本の接線の長さは等しい**．



□［3］の知識もまた，三角比の問題とのつながりが深い．三角形の辺がその内接円の「接線」となることに注意．また，各辺と内接円の半径が，その接点で「垂直」に交わることにも注意．

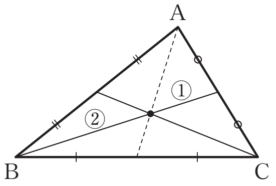
⇒　C&U ③ ④

［４］ 三角形の五心

□三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を三角形の**中線**という．

□三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その交点を三角形の**重心**という．

□三角形の重心について次のことが成り立つ．



三角形の中線は，重心によって２：１に内分される．

□三角形の 3 頂点からそれぞれの対辺に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わり，その交点を**垂心**という．

□三角形の 2 つの外角の二等分線の交点は，残り 1 つの内角の二等分線上にある．この交点を**傍心**という．三角形の傍心は 3 つある．

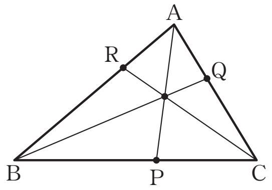
□三角形の内心・外心・重心・垂心・傍心をあわせて三角形の**五心**という．

［５］ チェバの定理・メネラウスの定理

□右図において，次の式が成り立つ．

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

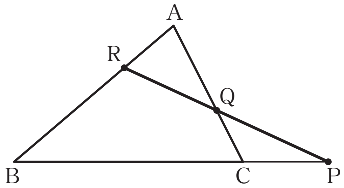
これを**チェバの定理**という．



□右図において，次の式が成り立つ．

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

これを**メネラウスの定理**という．



⇒　C&U ５

［６］ 接弦定理と方べきの定理

□右図において，

$\angle BAT = 90^\circ - \angle BAP$，$\angle APB = 90^\circ - \angle BAP$ より

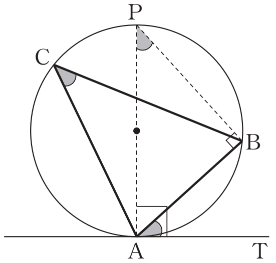
$\angle BAT = \angle APB$

である．また，弧 AB に対する円周角を考えると

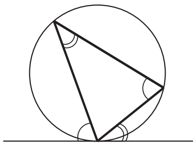
$\angle APB = \angle ACB$

である．よって，$\angle BAT = \angle ACB$ である．

一般的に次の定理が成り立つ．

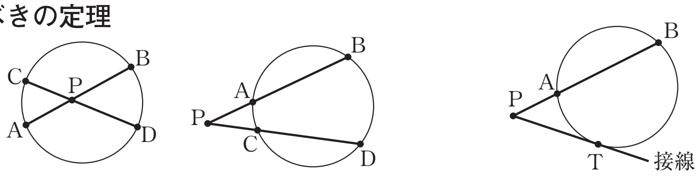


円の接線とその接点を通る弦のつくる角は
その角の内側にある弧に対する円周角に等しい．
これを**接弦定理**という．



□円内，または円外の1点から円と共有点をもつように引いた2本の直線に関して，次の定理が成り立つ．いずれも三角形の相似により証明できる．

方べきの定理



PA・PB＝PC・PD　　　PA・PB＝PT^2

⇒　C&U ⑥ ⑦

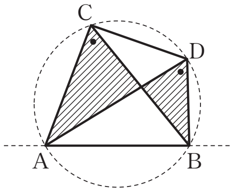
［7］　円に内接する四角形

□どんな三角形にも必ず外接円がただ1つ存在するが，それ以外の多角形では必ずしも外接円が存在するとは限らない．

□ある四角形が円に内接するための条件として主に使われるものに以下がある．

円周角の定理の逆

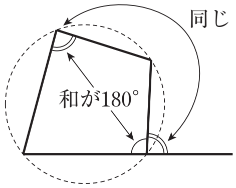
4点A，B，C，Dについて，点C，Dが直線ABに関して同じ側にあり，∠ACB＝∠ADBである．



対角の和

・対角の和が180°

・内角がその対角の外角に等しい

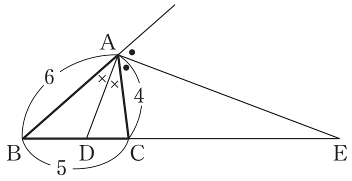


⇒　C&U ⑧

【CHECK & UP】

1　BC＝6，∠C＝90° の直角三角形 ABC において，その外接円 O の半径が 5 である．このとき，cos∠BAC の値を求めよ．また，外接円の中心 O から AC に下ろした垂線と AC との交点を M とするとき，線分 OM の長さを求めよ．

2　AB＝6，BC＝5，CA＝4 である △ABC において，∠A およびその外角の二等分線が直線 BC と交わる点をそれぞれ D，E とする．線分 DE の長さを求めよ．



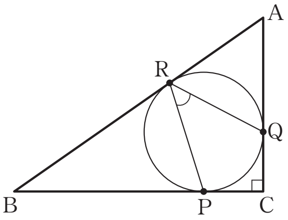
3　∠A＝60° の三角形 ABC において，その内接円の中心を I とする．∠BIC の大きさを求めよ．

4　AB＝5，BC＝4，CA＝3 である直角三角形ABCにおいて，その内接円の中心を I，半径を r とする．r および cos∠IBC の値を求めよ．

5　△ABC の辺 AB を 2：3 に内分する点を P，辺 AC を 1：2 に内分する点を Q とする．線分 BQ と線分 CP の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を R とする．次の三角形の面積比を求めよ．

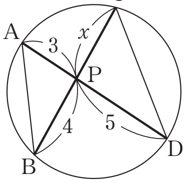
(1)　△AOB：△AOC　　　(2)　△ABC：△OBC

6　∠C＝90° の直角三角形 ABC において，右図のように △ABC とその内接円との接点を P，Q，R とする．このとき ∠PRQ の大きさを求めよ．

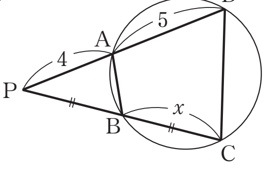


7　次の図において x の値を求めよ．ただし，T は接点である．

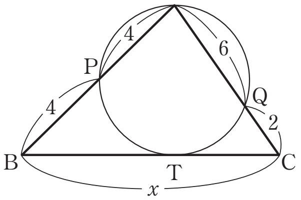
(1)



(2)

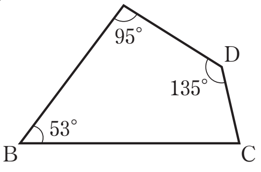


(3)

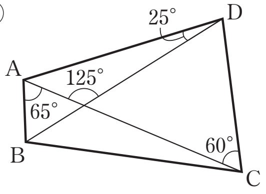


8　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを選べ．

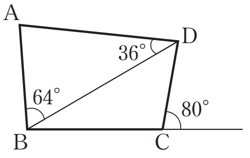
①



②



③



< Note >

第９講　三角比と平面図形(2)

1　(1)　$\triangle ABC$ において，$AB=5$，$AC=4$，$\angle A=60^\circ$ とする．$\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

(2)　$\triangle ABC$ において，$BC=5$，$CA=4$，$AB=6$ とする．$\angle C$ の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ．

＜ Note ＞

2　AB＝BC＝3，CD＝5，DA＝8 である四角形 ABCD が円に内接している．このとき，次のものを求めよ．

(1)　対角線 AC の長さ

(2)　四角形 ABCD の面積

(3)　対角線 AC と BD の交点を E とするとき，BE：ED

< Note >

3　$\triangle$ABC において，AB＝5，BC＝7，CA＝3 とする．$\angle$A の二等分線が $\triangle$ABC の外接円と交わる点を D，直線 AD と直線 BC の交点を E とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\angle$A の大きさおよび線分 AE の長さを求めよ．

(2)　線分 BE，DE の長さを求めよ．

(3)　外接円の中心を O，半径を R とする．R の長さおよび $\tan\angle$OBD の値を求めよ．

< Note >

第９講　三角比と平面図形(2)

△ABC において，AB＝15，AC＝10，∠A＝60° とすると，BC＝$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ である．∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると BD＝$\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$，AD＝$\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である．また $\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{キ}}{\sqrt{\boxed{ク}}}$ であることより，辺 BC の中点を E とすると $AE=\dfrac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$ である．

< Note >

第10講　集合・場合の数(1)

【基礎確認事項】

［1］　集合と包含関係

□数学において，範囲が明確に決まるものの集まりを**集合**といい，集合を構成する1つ1つのものを，その集合の**要素**という．

□a が集合 A の要素であることを，a は集合 A に**属する**といい，$\boldsymbol{a \in A}$ と表す．
a が集合 A の要素でないことを，$\boldsymbol{a \notin A}$ と表す．

例　偶数全体の集合を A と表すと，$2 \in A$，$3 \notin A$ である．

□集合を表すには，次の(ⅰ)，(ⅱ)の方法がある．

(ⅰ)　すべての要素を書き並べる　　**例**　$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

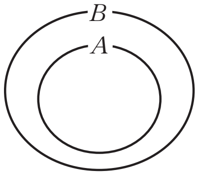
(ⅱ)　要素の満たすべき条件を書く　　**例**　$A=\{x|x$ は8の正の約数$\}$

□集合 A の要素が有限個のとき，その個数を $\boldsymbol{n(A)}$ で表す．

例　$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ のとき，$n(A)=4$ である．

□要素が1つもない集合を**空集合**といい，$\emptyset$ で表す．

□集合 A，B について，A の要素がすべて B に属するとき，A は B の**部分集合**といい，$\boldsymbol{A \subset B}$ と表す．



$A \subset B$

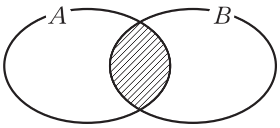
□$A \subset B$ かつ $A \supset B$ のとき，A と B は**等しい**といい，$\boldsymbol{A=B}$ と表す．

□空集合はすべての集合の部分集合である．

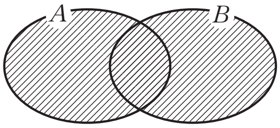
※この本では $A \subset B$ に $A=B$ の場合も含むこととする．

□A と B の両方に属する要素全体の集合を A と B の**共通部分**といい，$\boldsymbol{A \cap B}$ で表す．

□A と B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の**和集合**といい，$\boldsymbol{A \cup B}$ で表す．



$A \cap B$

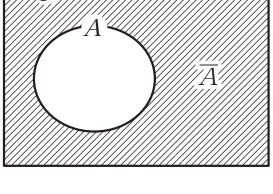


$A \cup B$

例　$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$，$B=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，$C=\{2\}$ のとき
$A \cap B=\{-1,\ 0,\ 1\}$，$A \cup B=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$，$A \cap C=\emptyset$

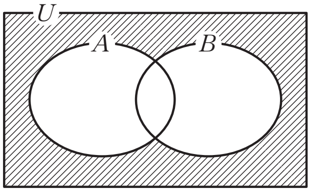
□1つの集合 U について，U の要素や U の部分集合だけを考えるとき，U を**全体集合**という．

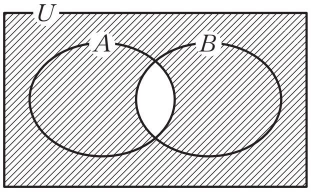
□全体集合 U の部分集合 A に対し，A に属さない U の要素全体の集合を A の**補集合**といい，$\overline{A}$ と表す．その定義から
$A \cap \overline{A}=\emptyset$，$A \cup \overline{A}=U$，$\overline{(\overline{A})}=A$ などがわかる．



□次の法則が成り立つ．

ド・モルガンの法則
(i)　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(ii)　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(i)


(ii)


□集合の包含関係を図で表したものを**ベン図**という．ベン図は，複数の集合の包含関係を扱う際にその関係を視覚化でき便利である．

□要素の個数について，主に次のことが成り立つ．ベン図で考えてみよ．

(i)　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$　　(**個数定理**)
　特に　$A \cap B = \emptyset$ のとき，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
(ii)　$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$　　(iii)　$n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B)$

⇒　C&U 1

［2］　和の法則

□ある2つのことがら（事象）A と B があって，これらが同時に起こりえない（A と B は排反である）とする．このとき，A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りあるとすれば，A または B が起こる場合の数は　$\boldsymbol{a+b}$　通りである．これを**和の法則**という．3つ以上の排反な事象についても同じことがいえる．

□これと先の個数定理により，以下の通りとなる．

$A \cap B = \emptyset$ のとき　$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
$A \cap B \neq \emptyset$ のとき　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

つまり，ある事象が起こる場合の数を考える上で，それを排反な事象に分けて考えることが有効な手段の1つである．

例　2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が4の倍数になる場合の数を求める．「目の和が4の倍数」になるのは，2個のさいころについて

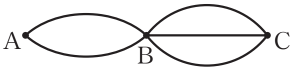
①目の和が4　　②目の和が8　　③目の和が12

の場合があり，①，②，③が同時に起こることはない（排反）．
2個のさいころをA，Bとし，目の出方を（Aの目，Bの目）と表すとすると
①となるのは (1，3)，(2，2)，(3，1) の3通り
②となるのは (2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2) の5通り
③となるのは (6，6) の1通り
よって，和の法則により　求める場合の数は　3＋5＋1＝9（通り）

［3］　**積の法則**

□ある2つのことがら（事象）A と B があって，A の起こり方が a 通りあり，そのどの場合に対しても B の起こり方が b 通りあるとすれば，A と B が同時に起こる場合や A と B が引き続いて起こる場合の数は　$\boldsymbol{a\times b}$　通りである．これを**積の法則**という．3つ以上の排反な事象についても同じことがいえる．

例　AからBに行く道が m 通り，BからCに行く道が n 通りあるとすると，AからBの行き方 m 通りのそれぞれについて，BからCの行き方 n 通りが存在する．よって積の法則によりその場合の数は　$m\times n$　通りである．



$m=2$, $n=3$のとき
$2\times3=6$(通り)

⇒　C&U ②

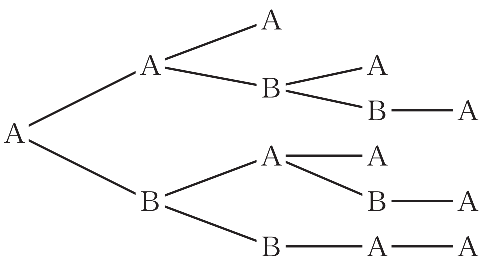
［4］　**樹形図**

□すべての場合をもれなく，重複なく数え上げるためには，その表記の方法を工夫することが必要である．有効な表記の方法として**樹形図**が挙げられる．

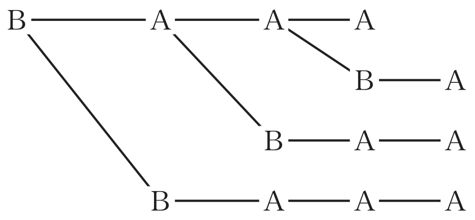
例　AとBが対戦し，先に3勝した方を優勝とする．引き分けはないものとして，Aが優勝する場合は何通りあるか．

対戦で勝った方を枝分かれの図で表す．

(i)



(ii)



(i)は1試合目でAが勝った場合，(ii)は1試合目でBが勝った場合で，(i)と(ii)は排反である．よって求める場合の数は　$6+4=10$（通り）

□排反になる事象の分け方は決して1つではない．その分け方によっては，後述の「順列」，「組合せ」などを活用して数え上げることも可能である．その一方で，さまざまな制約によりそれが使えないこともある．また，分け方によって「規則性」を利用できる場合もある．樹形図を含め，数え上げるための表記の方法を状況に応じて活用していこう．

⇒　C&U ③

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ の部分集合 A, B について

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 9\},\ A\cap B=\{2\},\ \overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$$

であるとき，次の集合の要素の個数を求めよ．

(1)　$A\cup B$　　(2)　B　　(3)　A

2 さいころを2回投げるとき，次の場合の数を求めよ．

(1)　2回の目の和が4または5になる目の出方

(2)　2回の目の積が奇数である目の出方

3 a，b，b，b，c の5個の文字から3個選んで1列に並べる方法は何通りあるか．

< Note >

第10講　集合・場合の数(1)

1　1から100までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ．

(1)　偶数

(2)　3で割り切れない整数

(3)　2でも3でも割り切れる整数

(4)　2と3の少なくとも一方で割り切れる整数

(5)　3で割り切れるが2で割り切れない整数

(6)　2と3の少なくとも一方で割り切れない整数

＜ Note ＞

2 ［1］ $x+y \leqq 4$ を満たす正の整数 x, y の組はいくつあるか.

［2］ ⑴ $(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ を展開した式の項は何個あるか.

⑵ 360 の正の約数の個数と，その総和を求めよ.

< Note >

3　5冊の異なる本がそれぞれ対応するブックケースに1冊ずつ入っている．それぞれの本をブックケースから取り出したあと，すべて間違ったブックケースに入れる方法は何通りあるか．ただし，ブックケースはすべて異なるとする．

＜ Note ＞

第10講　集合・場合の数(1)

144の正の約数全体の集合をA，216の正の約数全体の集合をBとする．集合$A\cup B$の要素の個数を求めよう．$144=2^{\boxed{ア}}\times 3^{\boxed{イ}}$より$n(A)=\boxed{ウエ}$である．$n(B)$も同様に求められる．また，$A\cap B$，すなわち144と216の正の公約数の集合は，その最大公約数の約数全体の集合である．144と216の最大公約数は$2^{\boxed{オ}}\times 3^{\boxed{カ}}$であることより，$n(A\cap B)$を求めることができる．したがって，個数定理により$n(A\cup B)=\boxed{キク}$である．また，$A$の要素の和は$\boxed{ケコサ}$である．

< Note >

第11講　場合の数(2)

【基礎確認事項】

［1］　順列

□n 個の異なるものから，異なる r 個 $(r\leqq n)$ を取って1列に並べることを，**n 個のものから r 個取る順列**といい，${}_n\mathrm{P}_r$ で表す．取るだけでなく，これを並べることが順列であり，これに対し，取るだけの総数を組合せという．組合せについては後述する．

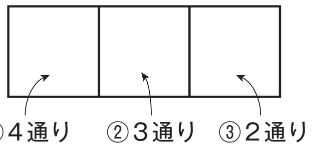
例　4個の数字1，2，3，4から異なる3個を取る順列 ${}_4\mathrm{P}_3$ について

①1番目の数字は1～4の4通り

②2番目の数字は①で取った数字を除く3通り

③3番目の数字は①②で取った数字を除く2通り

よって　${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$　である．



異なる n 個から異なる r 個取る順列

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}_{r\text{個}}$$

※${}_n\mathrm{P}_r$ のPはPermutation（順列）の頭文字をとったものである．

□n 個の異なるものをすべて並べるときの順列の総数は，${}_n\mathrm{P}_n$ で表される．これは ${}_n\mathrm{P}_r$ の式で $r=n$ のときであり，${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$　である．この1から n までのすべての自然数の積を **n の階乗**といい，$n!$ と表す．

異なる n 個すべての順列（総順列）

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$

□ここで以下のことが成り立つ．

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{P}_r&=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\\&=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\times\frac{(n-r)!}{(n-r)!}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

この式が $r=n$，$r=0$ でも成り立つように，$\mathbf{0!=1}$，${}_n\mathbf{P}_0\mathbf{=1}$　と定める．

⇒　C&U 1

［2］　重複順列

□n 個の異なるものから r 個を取る順列において，r 個に同じものがあることを許す順列を考える．1番目の選び方は n 通りである．2番目の選び方は，1番目で選んだものとの重複を許すので n 通りである．3番目以降についても同様に n 通りである．よって，以下のことが成り立つ．

異なる n 個から重複を許して r 個取る順列　（重複順列）

$$\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots\cdots n}_{r\text{個}}=n^r$$

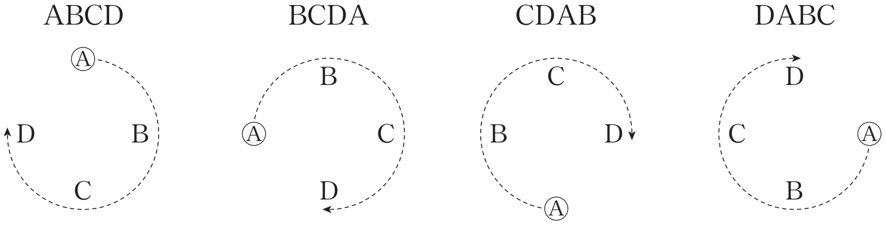
□重複順列においては $r\leqq n$ という制約は必要ない．また，同じものを選ぶことが許されるので，重複順列における「異なる n 個のもの」は「n 種類のもの」と考えることができる．

⇒　C&U ２

［3］　円順列とじゅず順列

□順列において，1 列ではなく円形に並べる順列を**円順列**という．円順列では，適当に回転して並びが一致するものを同じものとみなす．

例　A，B，C，D の順列において，ABCD と BCDA は 1 列のときは異なるものであるが，円順列では同じものである．

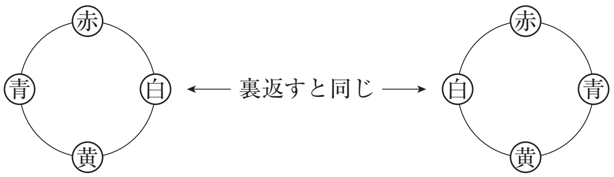


上記の 4 つは円順列においてはすべて同じものである．これらを A から見て右回りに並ぶ 3 個のものを順列として見るとすべて「BCD」となっている．したがって，A，B，C，D の円順列においては A を固定して残りの 3 文字の順列を考えればよいことがわかり，その場合の数は　$3!=6$（通り）である．

□一般に，すべて異なる n 個のものの円順列の総数は　$(n-1)!$　通りとなる．

□さらに表裏を裏返すことができる円順列（**じゅず順列**）を考える．

例　ここでは赤，白，黄，青の 4 色の球を円形にひもでつないで作る首飾りの総数を考えよう．上の円順列の考え方によるとその総数は　$3!=6$（通り）である．ところが，その中に「裏返すと同じもの」が存在する．



この場合においては裏返すと同じになるものが 2 組ずつ存在する．よって，首飾りの総数は　$3!\div2=3$（通り）である．

□一般に，すべて異なる n 個のもののじゅず順列の総数は　$(n-1)!\div2$　通りとなる．

⇒　C&U ３

［4］ 同じものがあるときの総順列

□ここまではすべて異なるものの順列を考えてきたが，ここでは同じものがある場合の順列を考えよう．

例 a，a，a，b，c の5個のものの総順列を考える．3個の a を a_1，a_2，a_3 として「すべて区別する」と，この「すべて異なる」5個のものの順列は　$5!=120$（通り）ある．

a_1	b	a_2	c	a_3
a_1	b	a_3	c	a_2
a_2	b	a_1	c	a_3
a_2	b	a_3	c	a_1
a_3	b	a_1	c	a_2
a_3	b	a_2	c	a_1

120通りのうち，左のように3個の a の場所が同じものは「区別をなくす」とすべて同じとなる．左の例でわかるように，同じ順列となるものは a の個数の順列　$3!=6$（通り）ずつ存在する．よって5個のうち同じものを3個含む順列の総数は　$5!\div 3!=20$（通り）である．

一般に，以下のことがいえる．

同じものを含む総順列

n 個のもののうち，同じものを p 個，q 個，r 個，…… ずつ含むときの順列は　$\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$　通りである．

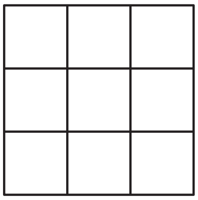
⇒ C&U 4

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 (1)　a，b，c，d，e の5つの文字を1列に並べる方法は何通りあるか．また，この5つの文字から3文字を取って1列に並べる方法は何通りあるか．

(2)　右の図において，9個のマス目の中に1～9の数字を1つずつ書き入れる方法は何通りあるか．



2　1，2，3，4，5の5個の数字を使って4桁の数をつくる．次のものはいくつできるか．ただし，同じ数字を重複して用いてもよいとする．

(1)　4桁の数の総数　　(2)　3個以下の数字を用いた整数

3　a，b，c，d，e，f の6色の玉がある．これを円形に並べるとき，a と b が隣り合わせになる場合，向かい合わせになる場合はそれぞれ何通りあるか．また，1本の糸を通して輪を作るとき，並べ方は何通りあるか．

4　YOKOHAMAの8文字を1列に並べる並べ方は何通りあるか．またそのうち，Y，K，H，Mがこの順に並ぶものは何通りあるか．

< Note >

第11講　場合の数(2)

1 [1]　父母と子供3人が1列に並ぶとき，次の問いに答えよ．

(1)　父母が両端にくる場合は何通りあるか．

(2)　父母の間に子供が2人以上入る場合は何通りか．

[2]　6個の数字0，1，2，3，4，5から異なる3個を用いて3桁の整数をつくる．このとき，次のものは何個できるか．

(1)　3の倍数　　(2)　324より小さい整数

＜ Note ＞

2 [1]　6個の異なる玉を次のように分けて入れる方法は何通りあるか．ただし，空箱がないようにするものとする．

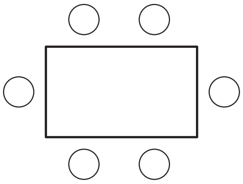
(1)　A，B 2つの箱に分ける　　(2)　2つに分ける

(3)　A，B，C 3つの箱に分ける

[2]　6人の家族を次のように座らせる方法は何通りあるか．

(1)　6人から4人選んで円形のテーブルに座らせる

(2)　6人を右の図のようなテーブルに座らせる



＜ Note ＞

3　黒玉 1 個，赤玉 2 個，白玉 4 個がある．次の問いに答えよ．

(1)　机の上に円形に置いて並べるとき，並べ方は何通りあるか.

(2)　糸を通して首飾りを作るとき，何通りの首飾りができるか.

＜ Note ＞

第 11 講　場合の数(2)

(1)　7 個の数字 1，2，3，4，5，6，7 から相異なる 5 個の数字を取ってつくる 5 桁の数のうち，25 で割り切れるものは **アイウ** 個ある．

(2)　0，1，1，1，2，2，3 の 7 個の数字からつくることができる 7 桁の整数は **エオカ** 個ある．

(3)　男子 5 人，女子 5 人が丸テーブルに着席するとき，男女が交互になる着席の仕方は **キクケコ** 通りある．

< Note >

第 12 講　場合の数(3)

【基礎確認事項】

［１］　組合せ

□ここまでは，いくつかのものを取り出して並べる順列について考えてきたが，ここでは取り出すだけのときの総数，いわゆる**組合せ**について考える．n 個の異なるものから，異なる r 個 $(r \leqq n)$ を取る組合せを $_n\mathrm{C}_r$ で表す．

例　4 個の数字 1，2，3，4 から異なる 3 個を取る組合せ $_4\mathrm{C}_3$ について

123 と 132 は順列としては異なるが組合せとしては同じである．よって，4 個の数字から順に数字が大きくなるように 3 つ取り出せば同じ組合せになることはない．そのような取り出し方は　123，124，134，234 の 4 通りである．よって　$_4\mathrm{C}_3=4$　である．

樹形図で考えると以下の通り．

□組合せを考える手法の 1 つとして，このように「順に大きく」，「アルファベット順」など「一定の規則に基づいた順列」を考えることで，重複を防ぐことができる．

例　同じ例を次のように考えることができる．

4 個の数字 1，2，3，4 から異なる 3 個を取って並べた「順列」$_4\mathrm{P}_3$ において，上記のように順に大きくなっているものとそうでないものが含まれる．例えば 1，2，3 を取り出したときその順列は

123，132，213，231，312，321

の 6 通りであるが，そのうち順に大きくなっているものは　123　ただ 1 つである．異なる 3 個のものの総順列は　$3!=6$（通り）であり，それは 3 つの数字の他の選び方についても同様である．つまり順列 $_4\mathrm{P}_3$ の中に，組合せとして考えると同じになるものが　$3!$　個ずつ含まれる．よって

$$_4\mathrm{C}_3=\frac{_4\mathrm{P}_3}{3!}=\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1}=4 \quad \text{である．}$$

異なる n 個から異なる r 個取る組合せ

$$_n\mathrm{C}_r=\frac{_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots1}$$

分母，分子ともに r 個の数字が並ぶ．

※$_n\mathrm{C}_r$ の C は Combination（組合せ）の頭文字をとったものである．

□また，n 個のものから r 個取ると残りは $n-r$ 個であるから，n 個から r 個取る組合せをつくることは n 個から $n-r$ 個取る組合せをつくることと同じである．よって

$$_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r} \quad \text{である．}$$

⇒　C&U 1

[2]　重複順列と組合せ

□$_{n}\mathrm{P}_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ であるから，$_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$　である．

$0!=1$，$_{n}\mathrm{P}_{0}=1$ であることより，$\boldsymbol{_{n}\mathrm{C}_{0}=1}$，$\boldsymbol{_{n}\mathrm{C}_{n}=1}$　であることがわかる．

□ここで，重複順列と組合せの関係について考える．

例　a，a，a，b，b の5個のものの順列について

同じものを含む順列の公式により，その総数は　$\dfrac{5!}{3!2!}=10$（通り）である．

ここで，$_{n}\mathrm{C}_{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$　であることより，$\dfrac{5!}{3!2!}={}_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}$　である．

重複順列がこのように組合せで表される理由を考えてみよう．

例　右図のように5個のものを並べる場所を用意し，左から順に①，②，③，④，⑤とする．①～⑤のうち，a が入る場所を3箇所選ぶ方法が $_{5}\mathrm{C}_{3}$ 通りあり，選んだ場所にはすべて同じ a を入れる．さらに，残った2箇所には同じ b を入れる．これで a，a，a，b，b の並び順はすべて決まる．また，b が入る2箇所を先に決める方法は $_{5}\mathrm{C}_{2}$ 通りあり，同様にして5個のものの順列が決まる．よって，この5個のものの順列は　$_{5}\mathrm{C}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$（通り）である．

①	②	③	④	⑤

このように，順列を考えるものの中に同じものがある場合に関しては，重複順列の利用と組合せの利用の両方が解法として考えられる．

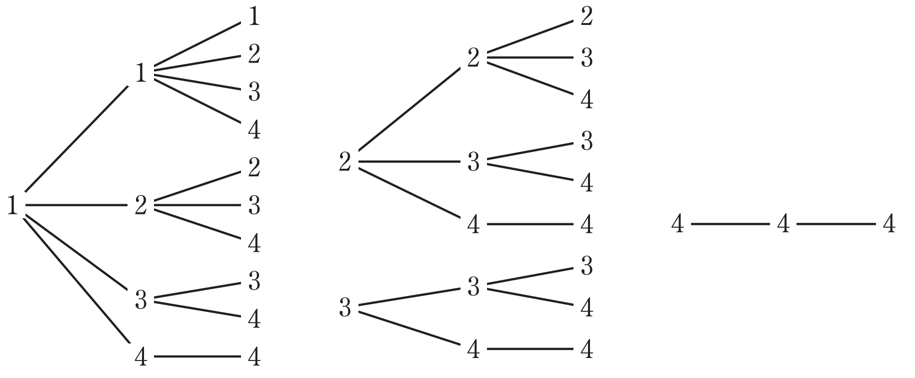
⇒　C&U 2

[3]　重複組合せ

□異なる n 個のものから r 個取り出す組合せにおいては，同じものを取り出すということは通常あり得ない．ここでは異なる「n 種類」のものから重複を許して r 個取り出す組合せ（**重複組合せ**）について考える．

例　1，2，3，4の4つの数字から重複を許して3個取り出す組合せ

樹形図で考えると以下の通り．



同じものを取り出すことが許されているので,「同じ, または順に大きく（小さくない順という）」なるように取り出した. これにより20通りあることがわかる.

しかし種類が多くなったり, 取り出す個数が大きくなったりすると樹形図では限界がある. そこで以下のように考える.

例 3本の｜と3個の○を用意し, この6個のものの総順列を考える. その結果, 3本の｜によって区切られた4つの場所に入った○の数だけ, 左から順に1, 2, 3, 4を取り出すとする. ある場所に○が1つもなければ, その場所に対応する数字は取り出さない.

○｜○｜｜○　⇒　1, 2, 4

○○｜｜○｜　⇒　1, 1, 3　(2と4はない)

これにより重複を許したすべての取り出し方を考えることができる. この総順列「重複順列」の考え方により　$\dfrac{6!}{3!3!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!3!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$（通り）である.

□このように, 種類を決めるために区切る｜と, 取り出す個数分の○の総順列を考えることにより重複組合せを計算によって求めることができる. また,「[2]重複順列と組合せ」でも触れたように, 3本の｜と3個の○を入れる6箇所の場所を用意し, 3本の｜が入る場所（または3個の○が入る場所）を組合せで決めることにより　${}_6C_3=20$（通り）と求めることもできる.

⇒　C&U 3

[4]　二項定理（数学Ⅱ）

□組合せの考え方の応用例の1つとして, $(a+b)^n$ の展開式における「各項の係数」を求めることができる.

$(a+b)^n$ は　$(a+b)(a+b)(a+b)\cdots\cdots(a+b)(a+b)$　のように n 個の因数 $a+b$ の積の形で表される. これを展開して出てくる項は, 各因数について a または b を選び, それらを掛けあわせたものと考えることができる. それぞれの項における係数は, 同類項の個数を考えることで求められる.

a^n は, n 個の因数すべてで a を選んだ場合で, その個数は1個

$a^{n-1}b$ は, n 個の因数のうち1個から b, 残り $n-1$ 個から a を選んだ場合で,
その個数は ${}_nC_1$ 個

$a^{n-2}b^2$ は, n 個の因数のうち2個から b, 残り $n-2$ 個から a を選んだ場合で,
その個数は ${}_nC_2$ 個

以下同様にしてその個数, すなわち係数を求めることで, 次の**二項定理**が成り立つ.

二項定理

$$(a+b)^n = a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + {}_n\mathrm{C}_3 a^{n-3}b^3 + \cdots$$
$$\cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

□二項定理における ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$ を，展開式の**一般項**といい，一般項における ${}_n\mathrm{C}_r$ を**二項係数**という．また，${}_n\mathrm{C}_0=1$ であることより，a^n の項は ${}_n\mathrm{C}_0 a^n$ と表すことがある．

⇒　**C&U** 4

【CHECK & UP】

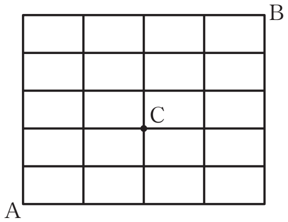
1　男子4人，女子3人の中から次のように選ぶ方法は何通りあるか.

(1)　7人から3人選ぶ

(2)　ある特定の1人を含むように4人選ぶ

(3)　男子2人，女子2人を選ぶ

2　右の図のように東西6本，南北5本の道路がある.
A から B に達する最短経路のうち，C を通らないものは何通りあるか.



3　みかん3個を7人に分ける方法は何通りあるか．ただし，みかんを2個以上もらう人や1個ももらわない人がいてもよい.

4　$(1-2x)^5$ の展開式における x^3 の係数を求めよ.

< Note >

第12講　場合の数(3)

1 [1]　自然数 n，r に対して，${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ が成り立つことを証明せよ.

[2]　8人の子供を次のように分ける方法は何通りあるか.

(1)　4人，3人，1人の3組に分ける

(2)　2人ずつA，B，C，Dの4組に分ける

(3)　2人，2人，2人，1人，1人の5組に分ける

＜ Note ＞

2 [1]　mathematics という 11 文字から 4 文字を取って並べる方法は何通りあるか.

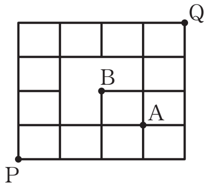
[2]　右の図の P 地点から Q 地点に至る最短経路について,

次の問いに答えよ.

(1)　A 地点を通る経路は何通りあるか.

(2)　B 地点を通る経路は何通りあるか.

(3)　最短経路は全部で何通りあるか.



< Note >

3 [1]　a, b, c, d はそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 のうちいずれかの数であるとする．次の問いに答えよ．

(1)　$a<b<c<d$ となる $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は何個あるか．

(2)　$a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は何個あるか．

[2]　$x+y+z=10$ を満たす整数 x, y, z について，次の問いに答えよ．

(1)　0 以上の整数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか．

(2)　自然数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか．

＜ Note ＞

第 12 講　場合の数(3)

(1)　男子 5 人，女子 5 人からなるグループから 3 人を選ぶ方法は **アイウ** 通りある．このうち，女子を少なくとも 1 人含む選び方は **エオカ** 通りある．

(2)　A，B，C，D 4 つの学級の生徒から合計 7 人の委員を選びたい．各学級から選ぶ人数の決め方の総数は，選ばれない学級があってもよいとき **キクケ** 通りあるが，どの学級からも少なくとも 1 人は選ぶこととしたとき，人数の決め方は **コサ** 通りある．

< Note >

第13講　確率(1)

【基礎確認事項】

［1］　事象と確率の定義

□さいころを投げて1の目が出たとする．一般に「さいころを投げる」などある実験や観察を行うことを**試行**といい，試行の結果「1の目が出る」など起こった現象を**事象**という．

□1つのさいころを投げたとき，「偶数の目が出る」という事象は「2の目が出る」，「4の目が出る」，「6の目が出る」という3つの事象に分けることができるが，「2の目が出る」という事象はこれ以上分けることができない．このように，これ以上分けることができない事象を**根元事象**といい，ある試行における根元事象すべての集合を**全事象**という．

例　1つのさいころを投げたときの根元事象は「1の目が出る」，「2の目が出る」，「3の目が出る」，「4の目が出る」，「5の目が出る」，「6の目が出る」で，その場合の数は6通りである．

□一般的に1つのさいころを投げるとき，どの目が出やすいということはない．このように，ある試行を行ったとき，どの根元事象が起こることも同程度に期待されるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という．

□根元事象が同様に確からしい試行で，根元事象がN通りあるとする．また，事象Aの根元事象がa通りあるとする．このとき，事象Aの起こる確率$P(A)$は次式で表される．

$$P(A)=\frac{a}{N}$$

以下で扱う試行においては，特に断りがない限り根元事象は同様に確からしいとする．

⇒　C&U 1

［2］　確率の基本性質と余事象

□同様に確からしい根元事象がN通りあり，そのうち事象Aの根元事象がa通りあるとすれば，$0\leqq a\leqq N$　である．したがって$0\leqq\frac{a}{N}\leqq 1$であることから

$$0\leqq P(A)\leqq 1$$

が成り立つ．

□$P(A)=0$のとき，Aは決して起こらない事象である．また，$P(A)=1$のとき，Aは必ず起こる事象であり，全事象そのものである．

□1つの試行において2つの事象A，Bがあるとき，A，Bがともに起こる事象をAとBの**積事象**といい，$\boldsymbol{A\cap B}$と表す．また，AかBの少なくとも一方が起こる（AまたはBが起こる）事象をAとBの**和事象**といい，$\boldsymbol{A\cup B}$で表す．

□このとき，次の定理が成り立つ．

確率の加法定理

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

□A が起これば B が起こらず，B が起これば A が起こらないとき，A と B は互いに**排反**である，または，A と B は互いに**排反事象**である，という．

□このとき $P(A\cap B)=0$ であるから，次のことが成り立つ．

> **A と B が排反事象のときの加法定理**
> $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

□A が起こらないという事象を A の**余事象**といい，$\overline{A}$ で表す．

□A と $\overline{A}$ は排反事象であり，また $A\cup\overline{A}$ は全事象である．したがって
$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$，$P(A\cup\overline{A})=1$ より以下が成り立つ．

> **余事象の確率**　$P(\overline{A})=1-P(A)$

⇒ C&U 2

［3］ 独立試行の乗法定理

□1つのさいころを投げる試行と，1つのコインを投げる試行は，その結果が互いに明らかに無関係である．このようにどの試行の結果も他の試行の結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は**独立**であるという．

□独立な試行について，次のことが成り立つ．

> **独立試行の乗法定理**
> 2つの試行 S，T が独立であるとき，S で起こる事象 A，T で起こる事象 B について，
> $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

例　さいころ1個とコイン1枚を同時に投げたとき，さいころで偶数の目が出て，コインで表が出る確率について

さいころを投げる試行とコインを投げる試行は独立であり，2つの試行の全事象は　6×2 通りである．またさいころで偶数の目が出て，コインで表が出る事象は　3×1 通りである．

よって　$P(A\cup B)=\dfrac{3\times1}{6\times2}=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{2}=P(A)\cdot P(B)$　である．

他の例においても明らか．

また，独立な3つ以上の試行に関しても同様なことがいえる．

⇒ C&U 3

【CHECK & UP】

1　赤球2個と白球3個が入った袋から球を2個取り出すとき，それがともに白球である確率を求めよ．

2　52枚のトランプのカードから1枚取り出すとき，次の確率を求めよ．
(1)　スペードまたは11が出る確率
(2)　スペードまたはハートが出る確率
(3)　ダイヤが出ない確率

3　射的でAは5発中4発，Bは5発中3発の割合で命中させる力をもっている．A，Bが同時に矢を射るとき，A，Bの少なくとも一方が命中させる確率を求めよ．

＜ Note ＞

第13講　確率(1)

1　りんご2個，みかん2個，桃1個の合計5個の果物について，次の問いに答えよ．

(1)　5個の果物から4個を選び，1列に並べる方法は何通りあるか．

(2)　5個の果物から4個を選び1列に並べるとき，りんごが隣り合って並ぶ確率を求めよ．

< Note >

2　1から10までの数字が書かれた10枚のカードが袋に入っている．この袋の中から3枚のカードを同時に取り出す．次の確率を求めよ．

(1)　5のカードを取り出す確率

(2)　カードの数字の最大が8以上である確率

(3)　1または2のカードを取り出す確率

< Note >

3　赤球3個，白球7個が入った袋Aと，赤球5個，白球5個が入った袋Bがある．それぞれの袋から同時に2個ずつ球を取り出す場合を考える．次の確率を求めよ．

(1)　少なくとも1個の赤球が含まれている確率

(2)　赤球，白球の両方が含まれている確率

(3)　赤球2個，白球2個を取り出す確率

< Note >

第 13 講　確率(1)

大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，目の出方は全部で アイ 通りある．出目の最大値が 5 になるか，または出目の最小値が 2 になる場合を求めたい．出目の最大値が 5 以下になるのは 2 個のさいころの出目がともに 1〜5 のときで，その場合の数は ウエ 通り．同様に出目の最大値が 4 以下になる場合の数は オカ 通り．よって出目の最大値が 5 になる確率は $\dfrac{キ}{ク}$ である．出目の最小値が 2 になる場合も同様に求められる．また，出目の最大値が 5 かつ出目の最小値が 2 になる確率は $\dfrac{ケ}{コサ}$ である．したがって，出目の最大値が 5 になるか，または出目の最小値が 2 になる確率は $\dfrac{シ}{ス}$ である．

＜ Note ＞

第14講　確率(2)

【基礎確認事項】

[1]　反復試行の確率

□同じ試行を独立に何回か繰り返すことを**反復試行**という．

反復試行の例を見てみよう．

例　さいころを続けて5回投げたとき，1の目が3回出る確率を求める．

1回投げたとき，1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であり，1の目が出ない確率は $\dfrac{5}{6}$ である．

5回中,1の目が3回出る場合の数は,それがどこで出たかを選ぶ ${}_5\mathrm{C}_3=10$（通り）あり，ここで選ばれなかった2回は1以外の目が出ている．

1の目がどこで出たとしても，乗法定理によりその確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

である．つまり10通りのいずれもその確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$ である．

したがって，求める確率は ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=10\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{125}{3888}$

□一般に，どの回においても独立な試行において，1回の試行で事象 A の起こる確率を p とすると，n 回行う反復試行において，A がちょうど r 回起こる確率は ${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$ である．

□反復試行においては，扱う事象が2つ以上になることや，事象に様々な制約（回数制限など）がつくことがあるため，確率を求める事象が何通りあるかについては必ずしも ${}_n\mathrm{C}_r$ だけでは決まらない．

⇒　C&U [1]

[2]　条件付き確率と乗法定理

□2つの事象 A，B があって，A の起こる確率 $P(A)$ は0でないとする．いま，A が起こったことを前提として B が起こるとき，その確率を $\boldsymbol{P_A(B)}$ で表し，これを A が起こったときの B の起こる**条件付き確率**という．

例　10本のうち3本が当たりくじであるくじを a，b 2人が1本ずつ順に引くとする．引いたくじはもとに戻さない．

a，b が当たることをそれぞれ事象 A，B とすると，A が起こったとき，残った9本のうち当たりくじは2本である．よって $P_A(B)=\dfrac{2}{9}$ である．

□$P(A)>0$，$P(B)>0$ のとき，一般に，以下の**乗法定理**が成り立つ．

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

例　52枚のトランプのカードから，2枚のカードを続けて引くとき，2枚ともハー

トである確率について

1枚目がハートである事象を A，2枚目がハートである事象を B とすると，求める確率は　$P(A\cap B)$　である．

$P(A)=\dfrac{13}{52}$，$P_A(B)=\dfrac{12}{51}$ であるから，乗法定理により

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}=\frac{1}{17}$$

もちろん，順列の考え方を使えば，$P(A\cap B)=\dfrac{{}_{13}\mathrm{P}_2}{{}_{52}\mathrm{P}_2}=\dfrac{1}{17}$　である．

□事象 A と事象 B が独立のときは，$P_A(B)=P(B)$ であるため

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=P(A)\cdot P(B)$$　である．

これが独立試行の乗法定理である．この式が成り立つとき，事象 A と B は独立であり，成り立たないとき，従属であるという．

□乗法定理を変形することにより，以下のことがいえる．

> 事象 A が起こったとき，事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ は
> $$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

分子は「A も B も起こる確率」であり当然であるが，分母が「$P(A)$」となっていることに注目しよう．「事象 A が起こることが前提」であることを忘れずに．

⇒　C&U 2

［3］　期待値

□一般に，全事象が排反事象 A_1，A_2，A_3，……，A_n に分けられ，それぞれの事象の確率が p_1，p_2，p_3，……，p_n であるときを考える．また，1つの変数 X を考え，事象 A_i が起こったら値 x_i をとるとする．

X	x_1	x_2	x_3	……	x_n	計
p	p_1	p_2	p_3	……	p_n	1

このとき，$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots\cdots+x_np_n$　で得られる値を変数 X の**期待値**といい，$\boldsymbol{E(X)}$ で表す．

> $$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots\cdots+x_np_n$$

⇒　C&U 3

【CHECK & UP】

1　1つのさいころを5回連続で投げるとき，次の確率を求めよ．

(1)　1の目がちょうど2回出る確率

(2)　1の目がちょうど1回，2の目がちょうど2回出る確率

(3)　5回目の試行で，3度目の偶数が出る確率

2　(1)　白球4個，黒球3個が入った袋から続けて2球取り出すとき，ともに白球である確率を求めよ．

(2)　コイン3枚を同時に投げる．少なくとも1枚は裏であるとき，3枚とも裏である確率を求めよ．

3　1と書かれたカードが1枚，2と書かれたカードが2枚，3と書かれたカードが3枚，4と書かれたカードが4枚入った袋がある．この中からカードを1枚取り出すとき，そのカードの番号の期待値を求めよ．

＜ Note ＞

第14講　確率(2)

1　円周を6等分する点を時計回りの順にA，B，C，D，E，Fとし，点Pは点Aを出発点として時計回りに円周上の点を移動する．さいころを振って偶数の目が出たときは2，奇数の目が出たときは1だけ動くこととする．点Pがちょうど点Aに着いたときに終了する．

(1)　ちょうど1周して終了する確率を求めよ．

(2)　ちょうど2周して終了する確率を求めよ．

< Note >

2 ［1］　A，B 2つの袋があって，Aには白球4個と赤球6個，Bには白球5個と赤球5個が入っている．Aから1球取り出してBに入れ，よくかきまぜてから1球取り出してAに入れるとき，次の確率を求めよ．

(1)　Aの白球の数が増加する確率

(2)　Aの白球の数が減少する確率

(3)　Aの白球の数が変わらない確率

［2］　白球5個と赤球3個が入っている袋から，1個ずつ順に3個の球を取り出した．1番目の球が赤であるとき，3番目の球が白である確率を求めよ．

＜ Note ＞

3　2個のさいころを同時に投げるとき，2個のさいころの出目の和の期待値を求めよ．

< Note >

第14講　確率(2)

A，Bの2人が次のような規則の下で得点を競うゲームを行う．1個のさいころを投げて1か2の目が出た場合はAがその回の勝者として2点を得て，3以上の目が出た場合はBがその回の勝者として1点を得るものとし，この操作を繰り返して先に4点得た方をゲームの優勝者としてゲームを終了する．

　このとき，Aが優勝者となる確率を求めたい．Bが優勝者となるためには，Aが2回勝つ前にBが4回勝たなければならない．Bが1回目から4連勝して優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である．また，Bが1回目から4連勝せずに優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キクケ}}$ である．したがって，Aが優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{コサシ}}{\boxed{キクケ}}$ である．

< Note >

第15講　命題と証明

【基礎確認事項】

[1]　命題と真偽

□数学においては，物事の真偽が明確に定まるような文や式を**命題**という.

□命題が正しいときその命題は**真**であるといい，正しくないときその命題は**偽**であるという.

例　「7は素数である」は真の命題

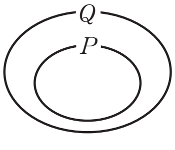
「$\sqrt{4}=-2$」は偽の命題

□命題「p **ならば** q である」を「$p \Longrightarrow q$」と表すことができる．このとき p を**仮定**，q を**結論**という．命題 $p \Longrightarrow q$ は，「仮定 p を満たすものはすべて結論 q を満たす」ということである.

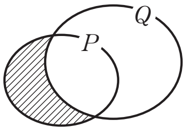
□条件 p を満たすものの集合を P，条件 q を満たすものの集合を Q とすると，

命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるということは，$P \subset Q$ が成り立つ，ということである.

命題 $p \Longrightarrow q$ が偽であるということは，「p を満たすものの中に，q を満たさないものが少なくとも1つある」ということである.



$p \Longrightarrow q$ が真



$p \Longrightarrow q$ が偽

□命題が偽であることを示すには，成り立たない例を1つ挙げればよい．このような例を**反例**という.

例　$x^2=1 \Longrightarrow x=1$　は偽の命題で，その反例は　$x=-1$ である.

[2]　条件の否定

□条件 p に対し，「p でない」を条件 p の**否定**といい，$\overline{p}$ で表す．また，二重否定 $\overline{\overline{p}}$ は p と同じである.

例　条件「$p：x \geqq 0$」の否定は，「$x \geqq 0$ ではない」ことである．つまり「$\overline{p}：x<0$」である.

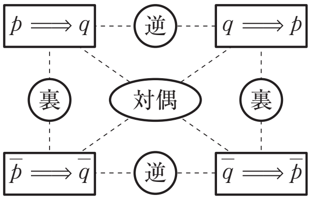
□条件 p，q について，次のことがいえる.

> 「p かつ q」の否定は「$\overline{p \text{ かつ } q}$」，つまり「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」
> 「p または q」の否定は「$\overline{p \text{ または } q}$」，つまり「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」

これは集合におけるド・モルガンの法則により明らかである.

⇒　C&U [1]

［3］　命題の逆・裏・対偶



□命題 $p \Longrightarrow q$ に対して

　　$q \Longrightarrow p$ を**逆**，$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ を**裏**，$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を**対偶**

　という．

□ある全体集合 U において，条件 p，q を満たす集合 P，Q を考えることにより，次のことがいえる．

> 命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する．

　もとの命題が真であっても，その逆や裏は必ずしも真ではない．

⇒　C&U ２

［4］　必要条件と十分条件

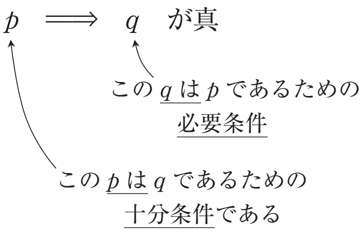
□ある2つの条件 p，q について，

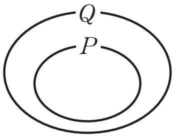
　命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき

　　q は p であるための**必要条件**である

　　p は q であるための**十分条件**である

　という．





$p \Longrightarrow q$ が真

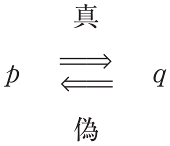
例　実数 x に関する2つの条件　$p：x=1$，　$q：x^2=1$　について

　$p \Longrightarrow q$ は真である．

　　よって p は q であるための十分条件である．

　$q \Longrightarrow p$ は偽である（反例：$x=-1$）．

　　よって p は q であるための必要条件ではない．



したがって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない．

同様に，q は p であるための必要条件であるが，十分条件ではない．

□命題 $p \Longrightarrow q$ が真で，かつ $q \Longrightarrow p$ が真であるとき，$\boldsymbol{p \Longleftrightarrow q}$ と表し，p は q であるための**必要十分条件**である，という．またこのとき，p と q は**同値**であるという．

⇒　C&U ３

［5］　背理法

□命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることを証明するとき，その対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ が真であることを証明してもよい．$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ が真とは，もとの命題 $p \Longrightarrow q$ の結論 q を否定すると，仮定 p を否定したものが必ず成立する，ということである．

□このように命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることの証明において，結論 q を否定することから始める方法として他に**背理法**がある．

例　「x，y が実数のとき，$x+y>0 \Longrightarrow x$，y の少なくとも一方は正」が真であ

ることを背理法で証明する．

　結論「x，y の少なくとも一方は正」の否定は，「x，y がともに 0 以下」である．

よって，$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$ であると仮定する．

このとき　$x+y \leqq 0$　となる．これは仮定「$x+y>0$」であることに反し矛盾する．

したがって，x，y の少なくとも一方は正である．

□上の例においては，結論を否定すると，仮定に反する，つまり「仮定が否定される」こととなり矛盾を導いた．その意味では，予め仮定の否定をつくりそれを導く対偶と同じであるが，背理法においては，矛盾するのは必ずしも問題文に明記された仮定に対してだけではなく，「数学の理（ことわり）」に矛盾することを導くことで証明することができる．つまり数学における定理や原則が仮定，と大きくとらえることができる．

⇒　C&U 4

【CHECK & UP】

1　次の条件の否定をつくれ．ただし，a，b は実数とする．

(1)　a は無理数である　　(2)　$a>0$　または　$b=0$　　(3)　a，b はともに正

2　命題「$x=2 \implies x^2=4$」の逆，裏，対偶を述べ，その真偽を調べよ．また偽のときは反例を挙げよ．ただし，x は実数とする．

3　a，b が実数のとき，$ab=0$ は $a=b=0$ であるための必要条件，十分条件，必要十分条件，そのいずれでもない，のどれにあたるか．

4　n が整数のとき，命題「n^2 は偶数 $\implies$ n は偶数」が真であることを次の方法で導け．

(1)　対偶を用いて　　(2)　背理法を用いて

< Note >

第 15 講　命題と証明

1　次の □ に最も適するものを下の選択肢①～④から１つ選べ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$x<2$ は $x \leqq 2$ であるための □．

(2)　$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための □．

(3)　$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための □．

(4)　$x^2 \leqq 4$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための □．

(5)　$x+y,\ xy$ がともに有理数であることは，$x,\ y$ がともに有理数であるための □．

①　必要十分条件である　　②　必要条件であるが十分条件ではない
③　十分条件であるが必要条件ではない　　④　必要条件でも十分条件でもない

＜ Note ＞

2 (1) 整数 n について，n^2 が 3 の倍数であるならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ．

(2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ．ただし，(1)の結果を使ってよいものとする．

＜ Note ＞

3 [1]　次の命題の真偽をそれぞれ調べよ．

(1)　すべての実数 x について，$x^2-1>0$

(2)　ある実数 x について，$x^2+x+1\leqq 0$

[2]　実数 x に関する式 $ax^2+bx+c=0$ がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ．

< Note >

第 15 講　命題と証明

次の［　　］に最も適するものを下の選択肢①～④から１つ選べ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$x<y$ は $cx<cy$ であるための［ア］．

(2)　$a>0$ は $\sqrt{a^2}=a$ が成り立つための［イ］．

(3)　$ab+1=a+b$ は a，b のうち少なくとも１つは１であるための［ウ］．

(4)　$a>0$ または $b>0$ であることは $a+b=1$ であるための［エ］．

①　必要十分条件である　②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない　④　必要条件でも十分条件でもない

< Note >

第 16 講　式と証明(1)

【基礎確認事項】

［1］　除法の原理

□ 7÷2 の結果は商 3，余り 1 である．これを式で表すと　$7\div2=\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}$ と表され，さらに　$7=2\times3+1$ と表される．つまり　(割られる数)＝(割る数)×(商)＋(余り)　である．つまり，次のことがいえる．

正の整数 n，m に関して，

$n=mq+r\quad(0\leqq r<m)$

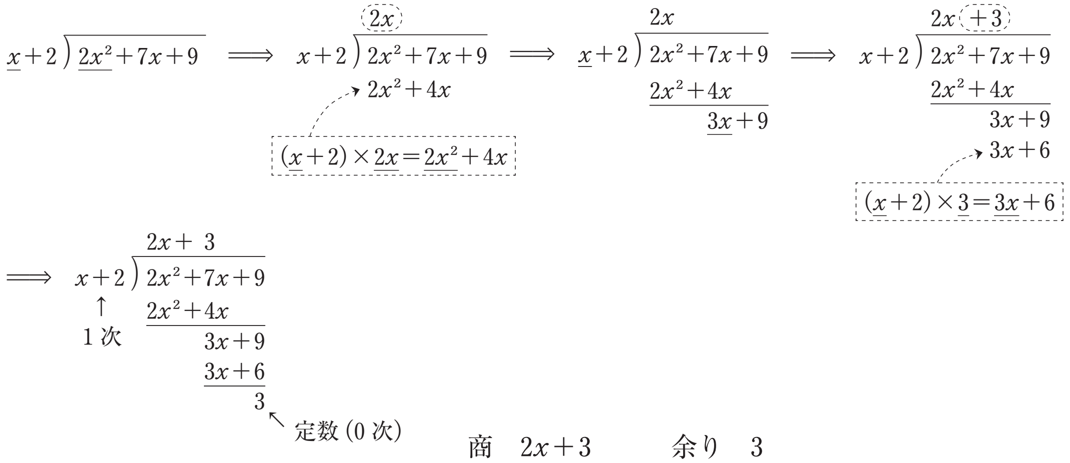
を満たす q，r がただ 1 つ存在し，このときの q が商，余りが r である．

$r=0$ のときは割り切れる．

□同様に，次の**除法の原理**が成り立つ．

> 整式 A を整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると
> $A=BQ+R\qquad$（R の次数は B の次数より低い）
> とただ 1 通りに表される．$R=0$ のときは割り切れる．

例　$(2x^2+7x+9)\div(x+2)$ の商と余りを求める．



商　$2x+3$　　　余り　3

以上の結果より　$2x^2+7x+9=(x+2)(2x+3)+3$　と表される．

⇒　C&U 1

［2］　剰余の定理・因数定理・組立除法

□ x についての整式 $P(x)$ を $G(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ と表すと，［1］で学んだように

$P(x)=G(x)\cdot Q(x)+R(x)\qquad$（$R(x)$ の次数＜$G(x)$ の次数）

と表される．

□ここで $G(x)$ を 1 次式 $ax+b$ とすれば

$P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)+R\qquad$（$R$ は定数）

と表される．

□ここで $x=-\dfrac{b}{a}$ をこの式の両辺に代入すると，$ax+b=0$ となるので

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=R$$

となり，結果的にもとの式に $x=-\dfrac{b}{a}$ を代入することで余り R が得られることとなる．

これを**剰余の定理**という．この結果は $G(x)$ が1次式を因数にもつときの余りを求めることに利用される．

□また，$P(x)$ が $ax+b$ で割り切れるならば $P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)$ と表され，剰余の定理により $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ となる．これを**因数定理**という．

□逆に $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ ならば $P(x)$ は $ax+b$ を因数にもつ，つまり $P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)$ の形で表すことができる．よって，代入して式の値を0にする数 $-\dfrac{b}{a}$ がわかれば，$ax+b$ で割ることによって商を求め，因数分解することができる．

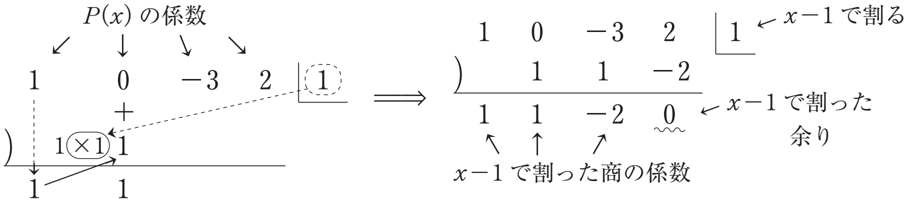
□しかしながら除法にはしばしば時間を要する．ここでは「**組立除法**」を紹介しよう．

例　$P(x)=x^3-3x+2$ を因数分解するとき，

$\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$ を考える（定数項の約数には負も含めるとする）

今回の式においては ±1，±2 である．これが　$P(x)=0$ の有理数解の候補である．

$x=1$ とし，以下の計算を行う．



よって　$P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$ と因数分解され，さらに進めると $(x-1)^2(x+2)$ と因数分解することができる．後述の「高次方程式」（第17講［2］）の解法の1つとして利用できる．

　ちなみに $x=-1$ で組立除法を実行すると余りが4となり，

$P(x)=(x+1)(x^2-x-2)+4$ となる．よって $P(-1)=4$ である．

組立除法はこのように式の値を求めるときにも利用できる．その際は因数分解した式は必要ない．代入した後の累乗計算が必要ないため，代入する値によっては解法の選択肢として利用できる．

⇒　C&U ②

［3］ 分数式

□整式 A と，定数でない整式 B で，$\dfrac{A}{B}$ の形で表される式を**分数式**という．その分母と分子に0以外の同じ数や式を掛けても割っても，式の値は不変である．

□分母と分子に共通因数がなくそれ以上約分できない式を**既約分数式**という．

□分数式の四則を行う際は，分母・分子それぞれを因数分解することを常に念頭において計算を進め，その上で約分や通分を実施するとよい．

⇒　C&U ③

［4］ 恒等式

□ある文字（変数）に関する等式で，その文字にどのような値を代入しても成立するとき，この式を**恒等式**という．これに比較し，特定の値のみで成立する式を方程式という．

例　$2x^2+7x+9=(x+2)(ax+b)+c$ が x についての恒等式となるように定数 a，b，c の値を定めることを考える．$2x^2+7x+9$ を $x+2$ で割った商と余りを求める方法もあるが，ここでは別の方法をとる．

①係数比較法

等式の右辺を計算し，x について整理すると　$ax^2+(2a+b)x+2b+c$　である．両辺の x に関する次数が同じ項の係数を比較すると

$a=2$，$2a+b=7$，$2b+c=9$　　よって　$a=2$，$b=3$，$c=3$ である．

ちなみに，右辺を見ると x の最高次である x^2 の係数は a であり，これを左辺の x^2 と比較することで $a=2$ であることがわかる．

②数値代入法

ある式が x の n 次式のとき，$n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば，その式は x についての恒等式である．x の2次式においては，3個の異なる値に対して成り立てばその式は恒等式となる．

$x=-2$ で成り立つので　$3=c$　　$x=0$ で成り立つので　$9=2b+c$

$x=1$ で成り立つので　$18=3a+3b+3c$

よって　$a=2$，$b=3$，$c=3$ である．

⇒　C&U ④

［5］ 等式の証明

□等式 $A=B$ が常に成り立つ，つまり恒等式であることの証明の主な方法は以下．

① A を計算して B になる，または B を計算して A になる

② $A=C$，$B=C$ より $A=B$

③ $A-B$ を計算して0になる

⇒　C&U ⑤

［６］ 不等式の証明

□等式における恒等式と同様，常に成り立つ不等式を**絶対不等式**という．

例 $x^2-4x+5>0$ は左辺が $(x-2)^2+1$ より常に 1 以上，よって 0 より大きい．したがって $x^2-4x+5>0$ は絶対不等式である．

これに対し $x^2-5x-6>0$ は $x<-1$，$6<x$ のときのみ成立する．このような不等式を，条件付き不等式という．

$x<-1$ または $6<x$ である x に対して $x^2-4x+5>0$ は常に成立する．

□証明したい不等式 $A>B$ が絶対不等式，条件付き不等式に関わらず，基本は

> $A-B$ を計算して「>0」すなわち「0 より大きい」

ことを示す．そこでは数値的に 0 より大きいことと同時に，「正」という符号的アプローチや，グラフによる判断を必要とする．

例 $x^2-4x+5>0$ の証明についても，

$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ のグラフは下に凸の放物線で頂点は $(2,\ 1)$

よってこのグラフはすべて x 軸，すなわち $y=0$ より上であるので

$(x-2)^2+1>0$

といったように，グラフを用いた証明などが考えられる．

□証明を進める上で利用する主な性質について以下に列挙する．

- 実数 a について，$a^2\geqq 0$（等号成立は $a=0$ のとき）
  実数 a，b について，$a^2+b^2\geqq 0$（等号成立は $a=b=0$ のとき）
- 実数 a について　$|a|\geqq 0$，$|a|^2=a^2$，$|a|\geqq a$，$|ab|=|a||b|$
- $A>0$，$B>0$ のとき，$A>B \iff A^n>B^n$　（n は正の整数）
- （相加平均）≧（相乗平均）
  $a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
  すなわち　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$（等号成立は $a=b$ のとき）
- シュワルツの不等式　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$（等号成立は $ad=bc$ のとき）
- 三角不等式　$|a|-|b|\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$

代表的な問題を通じてその手法を徐々に学ぶことが重要である．

⇒　C&U ⑥

［７］ 複素数

□平方すると -1 になる新しい数を新たに考え，これを文字 i で表す．つまり

$$i^2=-1$$

と定義する．

□また実数 a が $a>0$ のとき　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　と定義する．

特に，$a=1$ のとき　$\sqrt{-1}=i$ となる．

□この i を虚数単位という．

□これにより，$a>0$ のとき負の数 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{a}\,i$ となる．

□ここで a，b を実数として $\boldsymbol{a+bi}$ の形で表される新しい数を**複素数**という．

□この複素数 $a+bi$ において　a を**実部**，b を**虚部**という．

$b=0$ のとき　複素数 $a+bi$ は a となり，これは実数である．

$b\neq 0$ のとき　複素数 $a+bi$ を**虚数**という．特に $a=0$ のときの bi を**純虚数**という．

> a，b，c，d が実数のとき
>
> $a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$　　　$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

□加法，減法，乗法においては，虚数単位 i を文字と見立てて計算することができる．途中，$i^2=-1$ とする．結果，実部と虚部のそれぞれでまとめることとなる．

□複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を互いに**共役な複素数**（共役複素数）という．$a+bi=z$ とおくと，$a-bi=\bar{z}$ と表すことができる．

□このとき

$$z+\bar{z}=(a+a)+(b-b)i=2a \qquad z\bar{z}=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

より共役複素数の和，積は実数となる．

□除法については，分母が虚数の場合はそれと共役な複素数を分母，分子に掛けて分母を実数にする．

□虚数には大小関係の概念がない．複素数の更なる性質については「複素数平面」で扱われる．

⇒　C&U [7]

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 整式 $5x^4-7x^2+x$ を x^2-1 で割った商と余りを求めよ．

2 (1) 整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが -6，$x-2$ で割ったときの余りが -4 であるとき，$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2) 組立除法を用いて $x^3-6x^2+5x+12$ を因数分解せよ．

3 次の計算をせよ．

(1) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2-x-2}$

(2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}$

4 (1) 等式 $x^2-x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x の恒等式になるように，定数 a，b，c を係数比較法と数値代入法により定めよ．

(2) すべての実数 k の値に対して，常に等式 $(2k+3)x+(2-3k)y+k-5=0$ が成り立つように，x，y の値を定めよ．

5 (1) $a+b+c=0$ のとき $a^3+b^3+c^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$ を証明せよ．

(2) $abc=1$ のとき $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$ を証明せよ．

6 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $(x+y)^2 \geqq 4xy$

(2) $10x^2+y^2-6xy+4x+4 \geqq 0$

(3) $a>0$，$b>0$ のとき $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

7 複素数 $\dfrac{1+ai}{3+i}$ が

(1) 実数　　　(2) 純虚数

となるような実数 a の値をそれぞれ求めよ．ただし，i は虚数単位である．

< Note >

第 16 講　式と証明(1)

1 [1] $\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$ を計算せよ.

[2] 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$

(2) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

< Note >

2 [1]　実数 a，b，c について $a+b+c=0$ のとき，

等式 $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3=0$ が成り立つことを証明せよ．

[2]　次の不等式が成り立つことを証明せよ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$a>b>0$，$c>d>0$ のとき，$ac>bd$

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

(3)　$|x+y|\leqq|x|+|y|$

< Note >

3 (1) $x>0$ のとき，$x+\dfrac{4}{x+1}$ の最小値を求めよ．

(2) x^{11} を x^2+x+1 で割った余りを求めよ．

< Note >

第 16 講　式と証明(1)

(1)　$\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{(x-\boxed{\text{イ}})(x+\boxed{\text{ウ}})}$ である.

(2)　$a>0$, $b>0$ のとき　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である.

(3)　$x=1-\sqrt{7}\,i$ のとき，$x^3-4x^2+12x-15$ の値を求めたい．$x-1=-\sqrt{7}\,i$ よりこの式の両辺を 2 乗し，x について整理すると $x^2-\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}=0$ であり，$x=1-\sqrt{7}\,i$ はこの式を満たす.

ここで $x^3-4x^2+12x-15=(x^2-\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}})(x-\boxed{\text{キ}})+\boxed{\text{ク}}$ であることより，$x^3-4x^2+12x-15=\boxed{\text{ケ}}$ である.

< Note >

第 17 講　式と証明(2)

【基礎確認事項】

［1］　２次方程式の判別式と解と係数の関係

□複素数の範囲で考えることにより，2 次方程式の**解の公式**は以下.

a，b，c が実数のとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

□$D=b^2-4ac$ を**判別式**といい，この D の符号で解の種類を判別する.

$D\geqq 0$ $\Longleftrightarrow$ 実数解をもつ　　特に $D>0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ
$D=0$ $\Longleftrightarrow$ 1 つの実数解（重解）をもつ
$D<0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

□特に，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ であり，またこの 2 次方程式の判別式を D とすると，解の判別は　$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ の符号で行える.

□ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

であることより

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ が成り立つ．これを**解と係数の関係**という.

□これは，$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と変形できることにより，右辺を展開し，係数比較することによっても得られる.

□特に $a=1$ のときは　$\alpha+\beta=-b$，$\alpha\beta=c$　となる.

□また，このことから次のことがいえる.

$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ のとき，α，β は 2 次方程式　$x^2-px+q=0$　の 2 解

⇒ C&U 1

［2］　高次方程式

□一般に 3 次以上の方程式を高次方程式という．高次方程式は必ずしも解けるとは限らないが，因数分解，因数定理（組立除法）などを利用することで 1 次または 2 次の積の形で因数分解をすることができれば，解ける．また，複 2 次式や相反式など，置き換えや特殊な変形をすることで解くことができる場合もある.

□複素数の範囲においては，m 重解を m 個の解と数えるとすると，n 次方程式には n 個の解が存在する.

□また，実数係数の n 次方程式が虚数解をもてば，それと共役な虚数解も必ずもつことが知られている．

例 $3+\sqrt{2}\,i$ を解にもつ実数係数の2次方程式は，$3-\sqrt{2}\,i$ も解にもつ．

□2次方程式同様，3次方程式においても解と係数の関係を考えることができる．
3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α，β，γ とすると，
$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と変形し，係数比較することにより

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$，$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$ が成り立つ．

⇒　C&U 2

【CHECK & UP】

1 2次方程式 $3x^2+3x-6=0$ の2解を α, β とするとき，次の各式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $(\alpha-\beta)^2$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

2 次の方程式を複素数の範囲で解け．

(1) $x^3=1$

(2) $x^3-x^2-3x-1=0$

(3) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$

< Note >

第17講　式と証明(2)

1 (1)　実数 s, t が $s+t=p$, $st=3$ を満たすとき，実数 p のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　2次方程式 $x^2-(k+6)x+6=0$ の解がすべて整数となるような定数 k の値と，そのときの整数解をすべて求めよ．

＜ Note ＞

2　3次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$　……①　の1つの解が $1+2i$ であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．ただし，a，b は実数とする．

＜ Note ＞

3　実数 x, y, z が $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=4$, $(x+y)(y+z)(z+x)=20$ を満たすとき，$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

第 17 講　式と証明(2)

(1)　A，B の 2 人が同じ 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ を解いたが，A は 1 次の係数を，B は定数項を写し間違って計算したため，A は $x=-2,\ 6$，B は $x=-2\pm\sqrt{2}\,i$ という解を得た．このとき $b=$ [ア]，$c=-$[イウ] であり，正しい解は $x=-$[エ]，[オ] である．

(2)　3 次方程式　$x^3-2x^2+(a-3)x+a=0$　……①　が 2 重解をもつときの定数 a の値を求めたい．$x^3-2x^2+(a-3)x+a=(x+$[カ]$)(x^2-$[キ]$x+a)$ より①の解の 1 つは $x=-$[カ] である．x^2-[キ]$x+a=0$　……②　が $x=-$[カ] を解にもつとき，$a=-$[ク] である．このとき②は $x=-$[カ] を重解にもつことはなく，題意を満たす．また，②が重解をもつとき，$a=\dfrac{[ケ]}{[コ]}$ であり，このとき②の重解は $x=-$[カ] ではなく題意を満たす．したがって求める a の値は

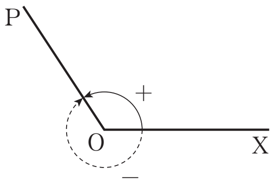
$a=-$[ク]，$\dfrac{[ケ]}{[コ]}$ である．

< Note >

第18講　三角関数(1)

【基礎確認事項】

［1］　一般角と弧度法

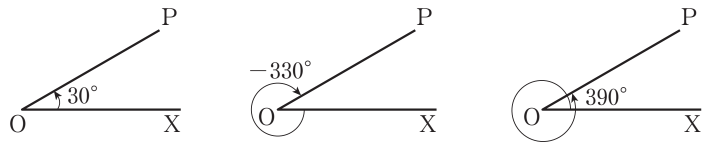


□右の図のような半直線 OX，OP を考える．この図は，はじめ OX の位置にあった半直線が点 O を中心に回転して OP の位置にきたと考えられる．このとき，OX を**始線**，OP を**動径**という．

□回転の向きは 2 つあり，反時計回りを**正の向き**，時計回りを**負の向き**という．

□正の向きに測った角の大きさを**正の角**（＋で表す），負の向きに測った角の大きさを**負の角**（－で表す）という．

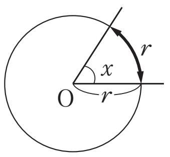
例



□上の例のように，始線と動径を与えても角の大きさの表現は 1 つに定まらない．このように「向き（正・負）」と「大きさ」で表した角を**一般角**という．

□ 360° 回転すると同じ位置に戻ることより，動径 OP の表す 1 つの角を α とすると，その一般角 θ は

$\theta=\alpha+360^\circ\times n$　($n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$)　と表すことができる．



$x=\dfrac{180}{\pi}$(度)＝1(rad)
↑
省略可

□半径 r の円において，この半径と同じ長さ r の弧に対する中心角の大きさを x° とすると，

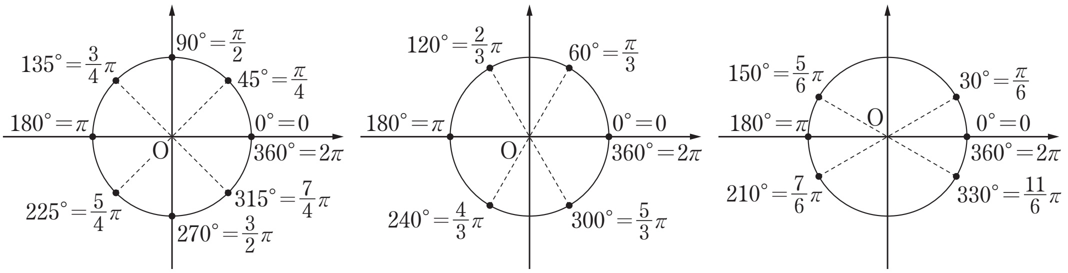
$2\pi r\times\dfrac{x}{360}=r$　より　$x=\dfrac{180}{\pi}$　である．

この結果は半径 r によらないことがわかる．

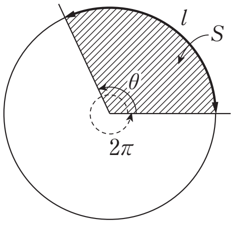
この x の大きさを **1 ラジアン（rad）** と表す．

□つまり　$\dfrac{180}{\pi}$(度)＝1(rad)　であり，180(度)＝π(rad) である．

□ラジアンを単位とする角の表記を**弧度法**という．単位「ラジアン（rad)」は通常は省略する．



□以下，特に断りのない限り角度は弧度法で表記する．



□半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$，円の面積は πr^2 である．
その一部である半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さ l および面積 S はその中心角に比例するから

$$l=2\pi r\times\frac{\theta}{2\pi}=r\theta \qquad S=\pi r^2\times\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta$$

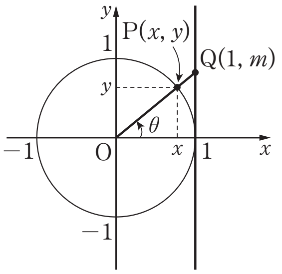
つまり $l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2\theta$ である．

⇒ C&U 1

［2］ 三角関数

□三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の θ が一般角になった場合も三角比と同様に考えることができる．

右図のように単位円（原点中心，半径1の円）において，x 軸の正の方向に始線をとり，一般角 θ の動径と円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 $x=1$ との交点を $\mathrm{Q}(1,\ m)$ とすると



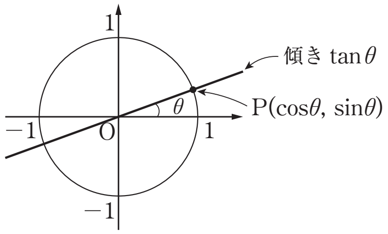
$$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x,\ \tan\theta=\frac{y}{x}=m$$

と定義される．これらはすべて θ の関数であり，まとめて**三角関数**という．

※$\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$（$n$：整数）に関しては $\tan\theta$ は定義されない．

□つまり，単位円上の点Pは $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表される．

□また，ある直線が x 軸の正の方向となす角を θ とすると，
この 直線の傾き m は $m=\tan\theta$ と表される．
これは三角比同様である．



□三角関数のとる値の範囲は

$$-1\leqq\sin\theta\leqq1,\ -1\leqq\cos\theta\leqq1\quad（\tan\theta は実数全体に値をとる）$$

である．

□また，三角比同様，三角関数についても次の相互関係が成り立つ．

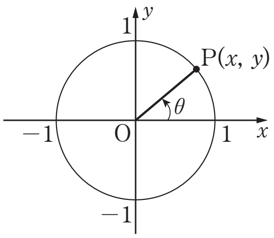
$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

※これと $\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$ から，単位円の方程式は　$x^2+y^2=1$ であるとわかる．「図形と方程式」（第21～24講）を既習ならば逆にこの方程式に $y=\sin\theta$，$x=\cos\theta$ を代入することで　相互関係の式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を導くことができる．

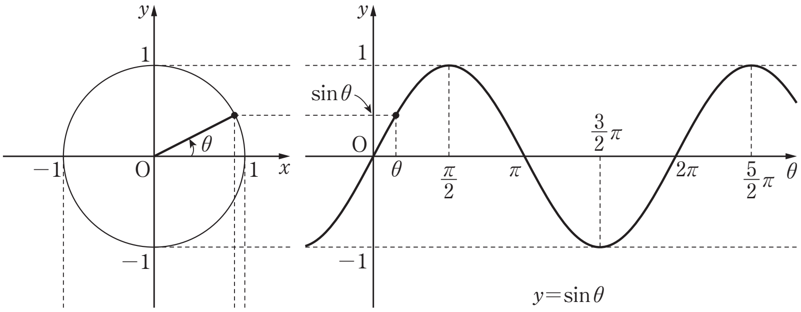
⇒ C&U 2 3 4 5

［３］　正弦関数・余弦関数のグラフと関数の性質

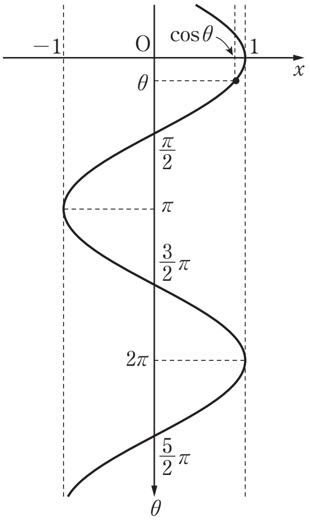
□［２］で触れたように，一般角 θ の動径と円との交点を $P(x,\ y)$ とすると，$y=\sin\theta$，$x=\cos\theta$ と表される．
したがって，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値の変化を見るには，それぞれ P の y 座標，x 座標の変化を見ればよい．



□ θ のそれぞれの値に三角関数の値を対応させ，グラフをかく．



$y=\sin\theta$



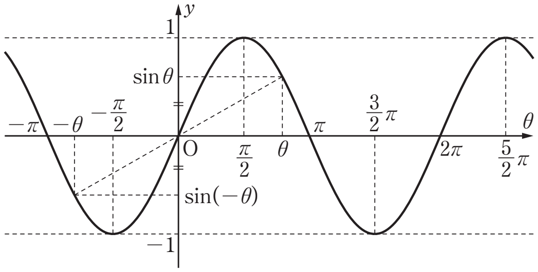
$x=\cos\theta$

□動径は１回転，つまり角度 2π ごとに同じ位置にくるので，$2\pi\cdot n=2n\pi$（n は整数）ごとに同じ位置にくる．
すなわち

$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta \qquad \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$$

が成り立つ．グラフで見ると，2π ごとに同じ形を繰り返す．このとき $\sin\theta$，$\cos\theta$ は 2π の**周期**をもつという．

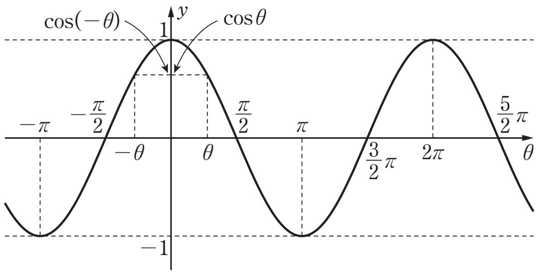
※ 2π が周期であるならば $2n\pi$ も周期となるため，単に周期というときは「正の周期のうち最小のもの」を指すことが多い．これを**基本周期**という．



□左のグラフより $y=\sin\theta$ のグラフは「原点対称」である．
よって

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

が成り立つ．



□左のグラフより $y=\cos\theta$ のグラフは「y 軸対称」である．
よって

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

が成り立つ．

※$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を**偶関数**といい，$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を**奇関数**という．$\cos x$ は偶関数であり，$\sin x$ は奇関数である．

□三角比の公式　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$　において，θ を $-\theta$ に換えると

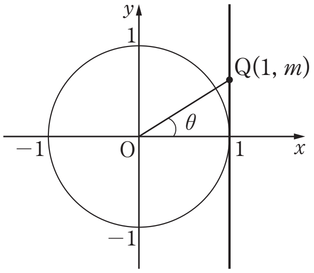
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$　が得られる．

また同じく三角比の公式　$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$，$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$　において，θ を $-\theta$ に換えると

$\sin(\pi+\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(\pi+\theta)=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$　が得られる．

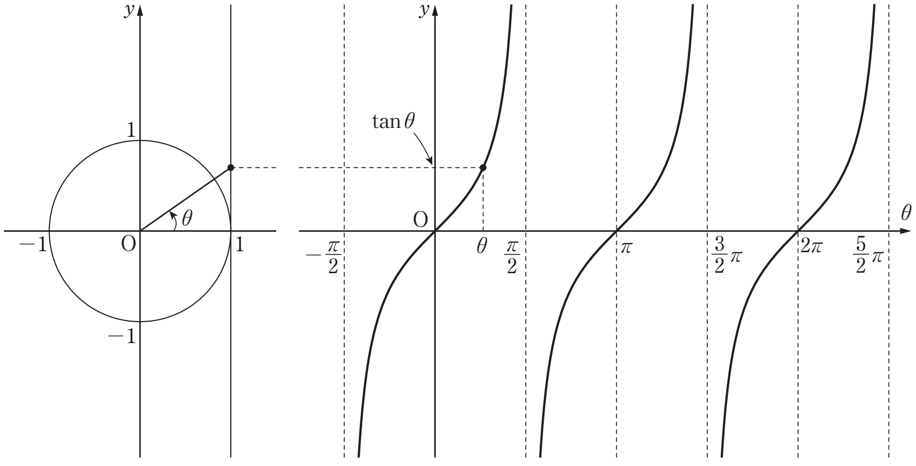
これらのことは，単位円において視覚的に確認できる．

［4］ 正接関数のグラフと関数の性質



□［2］で触れたように，一般角 θ の動径と直線 $x=1$ との交点を Q$(1,\ m)$ とすると，$m=\tan\theta$ と表される．
したがって，$\tan\theta$ の値の変化を見るには，Q の y 座標の変化を見ればよい．

□θ のそれぞれの値に関数の値を対応させ，グラフをかく．



$y=\tan\theta$

□グラフを見ると，π ごとに同じ形を繰り返す．つまり $\tan\theta$ の周期は π であり，
$\tan(\theta+n\pi)=\tan\theta$（$n$ は整数）が成り立つ．

□また，$y=\tan\theta$ のグラフは「原点対称」であることがわかる．よって　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ が成り立つ．

□$\tan\theta$ は $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\theta$（$n$ は整数）においては定義されない．$y=\tan\theta$ のグラフは θ の値を $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ に近づけると直線 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ に限りなく近づく．これらの直線が $y=\tan\theta$ のグラフの漸近線である．

※漸近線（ぜんきんせん）とは，グラフが限りなく近づく直線である．

□[３]同様，$\tan\theta$ においても三角比の公式から新たな公式を導くことができ，単位円のグラフから視覚的にも確認できる．

□三角関数の性質をまとめると以下となる．

$$\begin{cases}\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta\\ \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta\\ \tan(\theta+n\pi)=\tan\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta\\ \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta\\ \tan(\pi+\theta)=\tan\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}\end{cases}$$

⇒　C&U ⑥

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　半径 8，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さおよび面積を求めよ．

2　$\theta=-\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

3　θ が第 3 象限の角で，$\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

4　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け．

(1)　$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け．

(1)　$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\tan\theta\geqq-\sqrt{3}$

6　次の関数のグラフをかき，その周期を求めよ．

(1)　$y=2\sin\theta$　　(2)　$y=\cos\dfrac{\theta}{2}$　　(3)　$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

＜ Note ＞

第18講　三角関数(1)

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1)　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

(2)　$\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3)　$\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$

(4)　$5\cos\theta - 2\sin^2\theta + 4 > 0$

< Note >

2 (1) 関数 $y=3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期を求めよ．また，グラフをかけ．

(2) 方程式 $\sin\left(2x-\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲にもつ解の個数を求めよ．

< Note >

3　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$y = 2\sin\theta - 1$

(2)　$y = \sin^2\theta - 2\cos\theta - 1$

< Note >

第18講　三角関数(1)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値は，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\pi$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{ア}}}\pi$，$\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{エオ}}}\pi$

である．（$\boxed{\text{イウ}}$，$\boxed{\text{キク}}$ は順序を問わない．）

(2)　$2\sin^2\theta-3\sqrt{2}\cos\theta+2>0$ を満たす θ の値の範囲は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}<\theta<\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ である．

＜ Note ＞

第 19 講　三角関数(2)

【基礎確認事項】

［1］　加法定理

□三角関数について，次の**加法定理**が成り立つ．

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　② $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

③ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　④ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

⑤ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　⑥ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

□④が成り立つことにより，①が以下のようにして示される．

※③，④の証明は講義問題1で扱う．

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

①で β を $-\beta$ に置き換えることにより，②が以下のようにして示される．

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

⑤については①，③より以下のように導かれる．

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

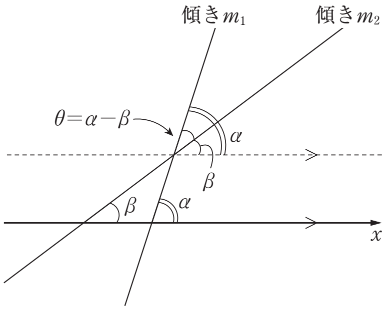
この式で β を $-\beta$ に置き換えることにより，⑥が導かれる．

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

□ x 軸の正の方向となす角が α，β である 2 直線の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とすると，⑥の公式を用いることにより，2 直線のなす角 θ について

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

である．



□なす角は鋭角で答えるのが基本であるが，鋭角か鈍角かがグラフから判断できない場合は，$\tan\theta$ の値が

正 ⟹ 鋭角　負 ⟹ 鈍角　であることを利用するとよい．

⇒ C&U 1 2

［2］　２倍角の公式と半角の公式

□加法定理において，$\beta=\alpha$ とすると，次の**２倍角の公式**（倍角の公式）が得られる．

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

※②の第１式において
$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ を用いると第２式が
$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ を用いると第３式が得られる．

□これらにより，角度が 2α の三角関数を，その半分の角 α の三角関数で表すことができる．
その結果，１次の三角関数であったものが２次（積）の三角関数で表されることとなる．

①より $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ が得られる．

②の第２式より $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ ……④

第３式より $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ……⑤

④，⑤より $\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ ……⑥が得られる．

これらにより，角度が α の三角関数を，その倍の角 2α の三角関数で表すことができる．
その結果，２次（積）の三角関数であったものが１次の三角関数で表されることとなる．

□ちなみに④，⑤，⑥で $2\alpha=\theta$ とおくと，次の**半角の公式**が得られる．

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}\qquad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\qquad \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

⇒ **C&U** 3 4

【CHECK & UP】

1　α，β が鋭角で，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ であるとき，$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ．

2　2直線 $y=-2x+1$，$y=3x-1$ のなす鋭角 θ を求めよ．

3　加法定理および2倍角の公式を用いて，次の公式（3倍角の公式）を証明せよ．

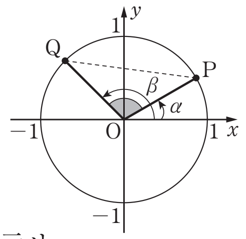
(1)　$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$　　(2)　$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

4　$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ $\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ のとき，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

第19講　三角関数(2)

1　右図について，次の問いに答えよ．



(1)　PQ^2 を次の２通りの方法で角 α，β を用いて表せ．

　(i)　点Ｐと点Ｑの座標をそれぞれ α，β で表し，
　　２点間の距離の公式（三平方の定理）を用いる．

　(ii)　△POQ において余弦定理を用いる．

(2)　(1)より $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ が成り立つことを示せ．

(3)　(2)で β を $-\beta$ に置き換えることにより，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ が成り立つことを示せ．

< Note >

2 (1) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき $\sin 2\theta=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ.

(2) 等式 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示し，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ.

＜ Note ＞

3 ［1］ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta - 3\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2} + 4 > 0$ を解け.

［2］ $\tan\dfrac{\theta}{2} = t$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1) $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$　　(2) $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　(3) $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$

＜ Note ＞

第19講　三角関数(2)

$\sin\frac{\pi}{10}$ の値を以下のようにして求める．$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき $5\theta=\frac{\pi}{\boxed{ア}}$ であることより

$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ ……① が成り立つ．ここで

$\sin 2\theta=\boxed{イ}\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=\boxed{ウ}\cos^3\theta-\boxed{エ}\cos\theta$

であることより，①は $\boxed{イ}\sin\theta\cos\theta=\boxed{ウ}\cos^3\theta-\boxed{エ}\cos\theta$ ……② と変形できる．

$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0$ より②の両辺を $\cos\theta$ で割って整理すると

$\boxed{オ}\sin^2\theta+\boxed{カ}\sin\theta-1=0$ となる．これを $\sin\theta$ について解くと，

$\sin\theta=\frac{-\boxed{キ}\pm\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．ここで $0<\sin\frac{\pi}{10}<1$ であることより，

$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-\boxed{キ}+\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である．

< Note >

第 20 講　三角関数(3)

【基礎確認事項】

［1］　合成公式

□$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形することを考える．

加法定理を用いると

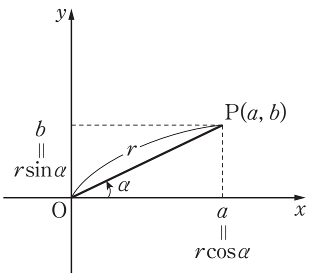
$$r\sin(\theta+\alpha)=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=(r\cos\alpha)\sin\theta+(r\sin\alpha)\cos\theta$$

であることより，これを $a\sin\theta+b\cos\theta$ と比較すると

$$a=r\cos\alpha,\ b=r\sin\alpha$$

である．よって右図のように OP$=r$，OP と x 軸の正の向きとのなす角が α であるような点 P$(a,\ b)$ をとると，

$$(a,\ b)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha),\ r=\sqrt{a^2+b^2}\ \text{である．}$$



したがって，$a\sin\theta+b\cos\theta$ の式から P$(a,\ b)$ を座標平面上に図示することで，三平方の定理により r を，OP と x 軸の正の向きとのなす角を考えることにより α（または，$\cos\alpha$ および $\sin\alpha$）を出すことができ，これらを用いて

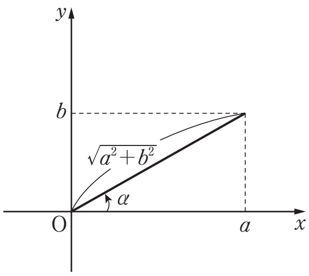
$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\quad\left(\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

と変形することができる．この変形をすることを，三角関数を**合成**するという．

α は正の角，負の角を問わない．一般的には $-\pi<\alpha\leqq\pi$（$-\pi\leqq\alpha<\pi$）の範囲で答えることが多い．また，いつでも α が具体的にわかるわけではない．

□また，この結果をふまえると，次のように変形を進めることもできる．

$$a\sin\theta+b\cos\theta$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\quad\cdots\cdots①$$



ここで　$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$

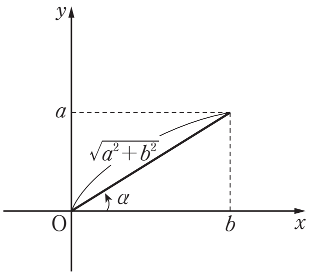
となる α を考えることにより，①は加法定理を用いて

$$\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

と変形することができる．

また①は

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\quad\cdots\cdots②$$



であり，ここで $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$

となる α を考えることにより，②は加法定理を用いて

$$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$$

と変形することができる.

つまり，正弦の加法定理，余弦の加法定理のいずれを使うかによって変形の結果が異なるため，目的に応じて選択をする必要がある.

⇒　C&U 1

［2］　積和の公式，和積の公式

□正弦，余弦の加法定理から

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,\quad \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,\quad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

が得られる.

□これらから，異なる角度の正弦，余弦の積を和に直す公式が得られる.

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\qquad \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\qquad \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

□また，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおくと，$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，$\beta=\dfrac{A-B}{2}$ であることより，異なる角度の正弦，余弦の和や差を積に直す公式が得られる.

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\qquad \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\qquad \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

□積を和に直す公式は，三角関数の積分（数学Ⅲ）において，和を積に直す公式は，方程式，不等式や証明において，それぞれ有効な手段の１つとなる.

⇒　C&U 2

【CHECK & UP】

1　次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする．

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$

2　加法定理を用いて，前ページの「積を和に直す公式」と「和(差)を積に直す公式」を導け．

< Note >

第20講　三角関数(3)

1 [1]　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，方程式 $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ を解け．

[2]　次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$

(2)　$y = 3\sin\theta + 4\cos\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

＜ Note ＞

2　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\sin\theta - \cos\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　$t = \sin\theta - \cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ．

(3)　$y = \sin 2\theta + \cos\theta - \sin\theta + 1$ の最大値，最小値を求めよ．

＜ Note ＞

3　$y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$　$(0\leqq x<\pi)$ の最大値，最小値を求めよ．

< Note >

第 20 講　三角関数(3)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$f(\theta) = 3\sin\theta\cos\theta - \sin\theta - \cos\theta$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x = \sin\theta + \cos\theta$ とおくとき，x のとり得る値の範囲は $-\sqrt{\boxed{ア}} \leqq x \leqq \sqrt{\boxed{イ}}$ である．

(2)　$f(\theta)$ を x の式で表すと，$f(\theta) = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}x^2 - x - \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である．

(3)　$f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{キ}}{2} + \sqrt{\boxed{ク}}$，最小値は $-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．また，最大値をとる θ の値は $\theta = \dfrac{\boxed{サ}}{4}\pi$ である．

< Note >

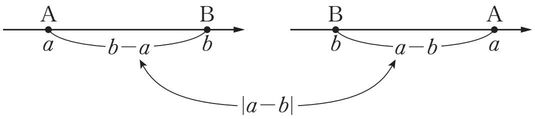
第 21 講　図形と方程式(1)

【基礎確認事項】

[１]　数直線上の点

□数直線上で，点 P に対応する数が a であるとき，a を点 P の**座標**といい，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a})$と書く．

□数直線上の点 A(a)，B(b) の距離 AB は



$$\mathrm{AB}=|b-a|$$

である．

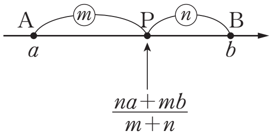
□線分 AB を $m:n$ に**内分**する点を P(p) とする．

$a<b$ のとき

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n \iff (p-a):(b-p)=m:n$

$m(b-p)=n(p-a)$

$(m+n)p=na+mb$　　よって　$p=\boldsymbol{\dfrac{na+mb}{m+n}}$



$a>b$ のときも同様に　$p=\dfrac{na+mb}{m+n}$

□線分 AB を $m:n$ に**外分**する点を Q(q) とする．

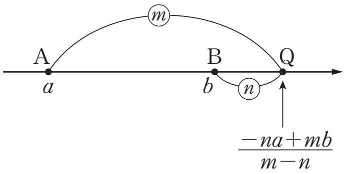
まずは　$m>n$ のとき，点 Q は半直線 AB 上にある．

$a<b$ のとき

$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=m:n \iff (q-a):(q-b)=m:n$

$m(q-b)=n(q-a)$

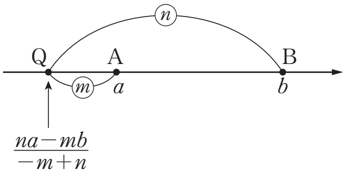
$(m-n)q=mb-na$　　よって　$q=\boldsymbol{\dfrac{-na+mb}{m-n}}$



$a>b$ のときも同様に　$q=\dfrac{-na+mb}{m-n}$

次に $m<n$ のとき，点 Q は半直線 BA 上にあり，

同様に　$q=\dfrac{na-mb}{-m+n}=\dfrac{-na+mb}{m-n}$ が成り立つ．



⇒　C&U 1

[２]　平面上の点の座標

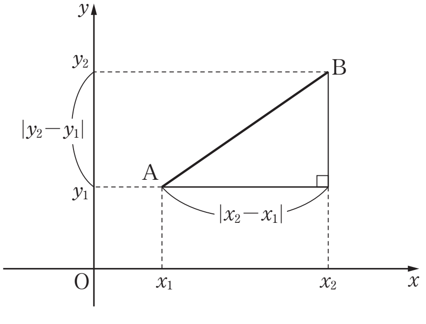
□座標軸が定められた平面を**座標平面**という．

座標平面上の２点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ の距離は

三平方の定理により

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

と表される．



□特に原点Oと点 $P(x,\ y)$ の距離は $OP=\sqrt{x^2+y^2}$ である．

□2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分ABを $m：n$ に内分する点を $P(x,\ y)$ とする．

A，B，Pから x 軸に垂線 AA'，BB'，PP' を下ろすと，

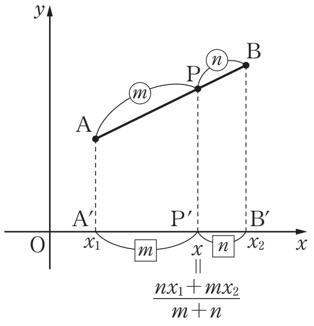
$AP：PB=A'P'：P'B'=m：n$　である．よって

内分点の公式により　$x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$ である．

同様に，y 軸に垂線を下ろして考えれば，$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$

である．

外分点についても同様に考えることができる．



□よって，以下のことがいえる．

> 2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分ABを $m：n$ に内分する点をP，外分する点をQとすると，
>
> 内分点　$P\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$　　外分点　$Q\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$
>
> 特に，中点の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

⇒　C&U 2

［3］　直線の方程式

□点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線を考える．

傾き m，y 切片 n の直線の方程式は

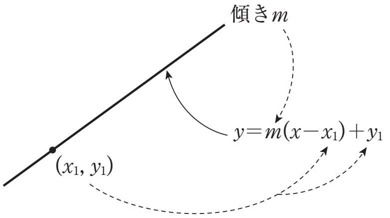
$y=mx+n$　……①

と表される．これが点 $(x_1,\ y_1)$ を通るとき

$y_1=mx_1+n$　……②

①－②より　$y-y_1=m(x-x_1)$

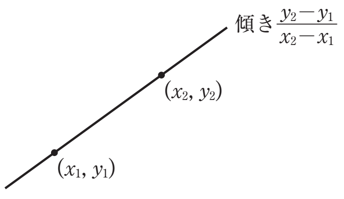
ゆえに　$\boxed{y=m(x-x_1)+y_1}$



□特に，異なる2点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線は，

$x_1 \neq x_2$ のとき　直線の傾きは　$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ であることより

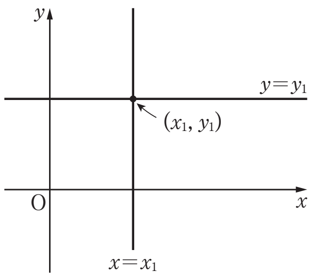
$\boxed{y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1}$ と表せる．



□傾きが0の場合は x 軸に平行な直線となり，その方程式は

$y=y_1$　となる．

□また $x_1=x_2$ のときは，x 軸に垂直（y 軸に平行）な直線となり，その方程式は　$x=x_1$　となる．



□ a，b の少なくとも一方が 0 でなければ，$ax+by+c=0$ の表す図形は直線である．
この式を直線の方程式の**一般形**という．

⇒ C&U 3

［4］ 2直線の平行・垂直

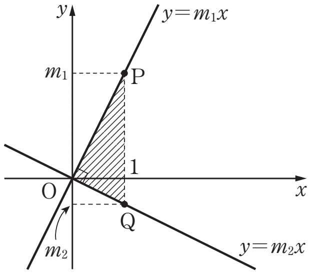
□ 2直線 l_1：$y=m_1x+n_1$，l_2：$y=m_2x+n_2$ が平行となるのは，$m_1=m_2$ のときである．

□ここでは垂直となるときを考える．
l_1 と l_2 を平行移動し，ともに原点を通るようにし，$y=m_1x$ と $y=m_2x$ が垂直になるための条件を考える．
直線 $y=m_1x$ と $y=m_2x$ の上にそれぞれ
点 $\mathrm{P}(1,\ m_1)$，$\mathrm{Q}(1,\ m_2)$ をとる．
三平方の定理により　$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2$

$$(m_1-m_2)^2=(1+m_1{}^2)+(1+m_2{}^2)$$

よって　$m_1m_2=-1$

逆に $m_1m_2=-1$ ならば，上記を逆にたどることにより
2直線 l_1，l_2 は垂直になる．



□したがって，

l_1 と l_2 が平行	$\Longleftrightarrow$	$m_1=m_2$	l_1 と l_2 が一致	$\Longleftrightarrow$	$m_1=m_2$ かつ $n_1=n_2$
l_1 と l_2 が垂直	$\Longleftrightarrow$	$m_1m_2=-1$			

である．

□一般に，2直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$ と $a_2x+b_2y+c_2=0$ の位置関係について

平行	$\Longleftrightarrow$	$a_1b_2-a_2b_1=0$　$(a_1:a_2=b_1:b_2)$
一致	$\Longleftrightarrow$	$a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$
垂直	$\Longleftrightarrow$	$a_1a_2+b_1b_2=0$

である．

⇒ C&U 4

［5］ 点と直線の距離

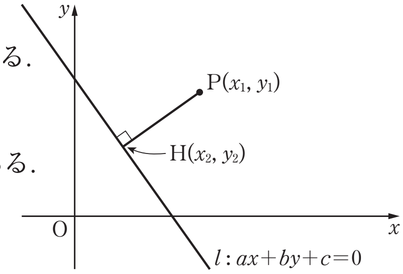
□点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ から方程式 $ax+by+c=0$ で表される直線 l に下ろした垂線 PH の長さを求めよう．

$\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$ とすると，$\mathrm{PH}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ である．

（i）$ab\neq0$ のとき

l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，PH の傾きは $\dfrac{b}{a}$ である．

よって　$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{b}{a}$ より



$\begin{cases} x_2-x_1=at \\ y_2-y_1=bt \end{cases}$ ……①（t は実数）とおける．

したがって　$\mathrm{PH}=\sqrt{(at)^2+(bt)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,|t|$ である．

また H は直線 $ax+by+c=0$ 上の点であるから　$ax_2+by_2+c=0$ である．

これと①より $a(x_1+at)+b(y_1+bt)+c=0$

$(a^2+b^2)t=-ax_1-by_1-c$　　ゆえに　$t=-\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$

したがって　$\mathrm{PH}=\sqrt{a^2+b^2}\left|-\dfrac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}\right|=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(ii)　$ab=0$ のとき

$a=0$ ならば $b\neq0$　　このとき　$x_1=x_2$ であり，$\mathrm{PH}=|y_2-y_1|=\left|-\dfrac{c}{b}-y_1\right|$

$b=0$ ならば $a\neq0$　　このとき　$y_1=y_2$ であり，$\mathrm{PH}=|x_2-x_1|=\left|-\dfrac{c}{a}-x_1\right|$

これらは(i)の結果でそれぞれ $a=0$，$b=0$ とおいたときに等しい．

以上より，以下のことがいえる．

> 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は
>
> $$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

⇒　C&U ５

【CHECK & UP】

1　直線上の点 A(-3)，B(5) に対し，線分 AB を次のように分ける点の座標を求めよ．

(1)　3：1 に内分する点 P　(2)　4：1 に外分する点 Q　(3)　1：2 に外分する点 R

2　3 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　線分 BC の中点 M の座標を求めよ．

(2)　三角形 ABC の重心 G の座標を求めよ．

3　次の直線の方程式を求めよ．

(1)　2 点 $(2,\ 3)$，$(-3,\ 8)$ を通る直線

(2)　$a\neq0$，$b\neq0$ のとき，2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線

4　点 $(1,\ 2)$ を通り，直線 $3x+4y+5=0$ に平行な直線，および垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ．

5　3 点 O$(0,\ 0)$，A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$x_1\neq0$ とする．

(1)　線分 OA の長さを求めよ．

(2)　点 B と直線 OA の距離 d を求めよ．

(3)　三角形 OAB の面積 S を求めよ．

< Note >

第 21 講　図形と方程式(1)

1　2 直線 $ax+y+1=0$　……①，$x+ay-1=0$　……②　について，次の問いに答えよ．

(1)　①と②が垂直に交わるときの a の値を求めよ．

(2)　①と②が交点をもたないときの a の値を求めよ．

< Note >

2　$\triangle$ABC で，辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L$(4,\ -1)$，M$(-1,\ 1)$，N$(-2,\ -5)$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ．

(2)　直線 AB の方程式，および点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ．また，$\triangle$ABC の面積を求めよ．

(3)　$\triangle$ABC の外心の座標を求めよ．

< Note >

3 直線 $l : y=2x-3$ と点 $\mathrm{A}(5,\ 2)$ がある．次の問いに答えよ．

(1) 直線 l に関して，点Aと対称な点Bの座標を求めよ．

(2) 点Pが直線 l 上を動くとき，APの長さの最小値を求めよ．また，点 $\mathrm{C}(6,\ 6)$ に対して，AP＋PCの値が最小となる点Pの座標を求めよ．

＜ Note ＞

第21講　図形と方程式(1)

xy 平面上に2点 A(3, 2), B(8, 9) と，直線 l : $y=x-3$ 上を動く点Pがある．AP＋PB の値が最小となるときの点Pの座標を求めよう．点Aを通り，直線 l に垂直な直線 m の方程式は $y=-x+$ [ア] である．また，直線 l と直線 m の交点Mの座標は ([イ], [ウ]) である．ここで，直線 l に関して点Aと対称な点を A′(a, b) とおき，2点A，A′の中点の座標が点Mと一致することを利用すると，$a=$ [エ]，$b=$ [オ] である．AP＋PB の最小値は A′P＋PB の最小値と等しく，それは直線 A′B 上に点Pが存在するときである．直線 A′B の方程式は $y=$ [カ] $x-$ [キク] であることより，点Pの座標は ([ケ], [コ]) である．

< Note >

第22講　図形と方程式(2)

【基礎確認事項】

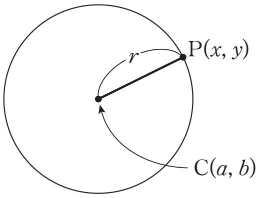
［1］　円の方程式

□中心 $\mathrm{C}(a,\ b)$ で半径 r の円上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$\mathrm{CP}=r$　かつ　$\mathrm{CP}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ より

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$　これを両辺2乗することで

方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ が得られる．これが，中心 $\mathrm{C}(a,\ b)$，半径 r の円上にある点が満たすべき方程式である．



> **中心 $\mathrm{C}(a,\ b)$ で半径 r の円の方程式**
>
> $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
>
> 特に，原点中心のときは　$x^2+y^2=r^2$

※上記のように，点 $(x,\ y)$ が満たすべき条件から得られた $x,\ y$ の式を「軌跡」の方程式という．上記はこの軌跡の考え方から円の方程式を導いたものである．軌跡については後述（第23講［1］）．

□また，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　より　$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

ここで　$-2a=A$，$-2b=B$，$a^2+b^2-r^2=C$ とおくと

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

と表される．

□逆にこの形で表された方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形に変形したとき，これが円を表すのは $k>0$ のときである．$k=0$ のときは点 $(a,\ b)$ を表し，$k<0$ のときはこの方程式が表す図形はない．

⇒　C&U 1

［2］　円と直線

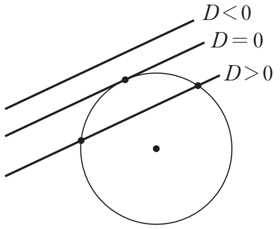
□円と直線の共有点の座標は，2直線の交点と同様に，2つの図形を表す方程式から y を消去して得られる x の方程式（2次方程式）を解くことにより求めることができる．

□また，この2次方程式の判別式を D とすると，円と直線の位置関係と共有点の個数は次のようになる．

(i)　$D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる2点を共有する（異なる2点で交わる）

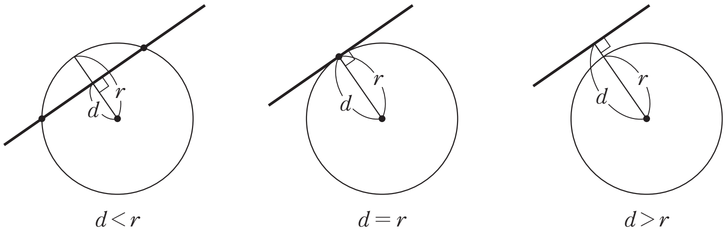
(ii)　$D=0$　$\Longleftrightarrow$　1点を共有する（接する）

(iii)　$D<0$　$\Longleftrightarrow$　共有点をもたない



□ここで，円の中心と直線との距離 d と円の半径 r の大小関係により，円と直線の位置関係と共有点の個数は次のようになる．

(i)　$d<r \iff$ 異なる2点を共有する（異なる2点で交わる）
(ii)　$d=r \iff$ 1点を共有する（接する）
(iii)　$d>r \iff$ 共有点をもたない



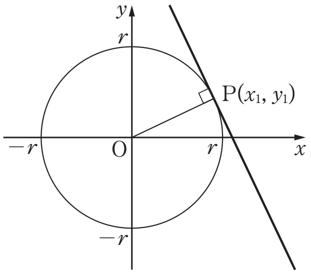
⇒　C&U 2

［3］　円と接線

□円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 l の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

と表される.



□これは次のように示される.

$x_1=0$ のときは，$\mathrm{P}(0,\ r)$ または $\mathrm{P}(0,\ -r)$ であり，
l の方程式はそれぞれ $y=r$，$y=-r$　である.

$x_1\neq 0$ のとき，直線OPの傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ である．$\mathrm{OP}\perp l$ であることから，
l の方程式は $y=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1$　すなわち　$x_1x+y_1y=x_1{}^2+y_1{}^2$ である.
Pは円上の点であることより $x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$　　よって l の方程式は　$x_1x+y_1y=r^2$ である.
この式は $x_1=0$ のときも成立する.

□同様な証明で，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

と表される.

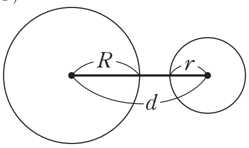
⇒　C&U 3

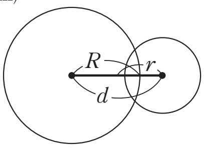
［4］　2つの円

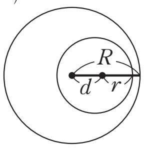
□半径がそれぞれ R，r $(R>r)$ である2円の中心間の距離を d とする.
2円の位置関係は次の場合がある.

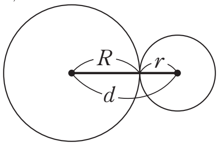
(i)　$d>R+r$　$\Longleftrightarrow$　一方が他方の外部にある
(ii)　$d=R+r$　$\Longleftrightarrow$　**外接**する（1点を共有）
(iii)　$R-r<d<R+r$　$\Longleftrightarrow$　2点で交わる
(iv)　$d=R-r$　$\Longleftrightarrow$　**内接**する（1点を共有）
(v)　$d<R-r$　$\Longleftrightarrow$　一方が他方の内部にある

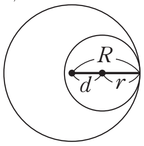
(ii)(iv)のとき，2つの円は**接する**という．

(i)


(iii)


(v)


(ii)


(iv)


□2円の共有点の座標についても，それらを表す方程式の連立方程式を解くことで求めることができる．

⇒　C&U 4

[5]　2つの図形の交点を通る図形

□一般に　図形 $f(x,\ y)=0$，$g(x,\ y)=0$ の交点を通る図形の式は

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0\ （k \text{ は定数}）$$

と表せる（ただし，$g(x,\ y)=0$ 自身は表せない）．

例　直線 $x+y+1+k(2x-y+5)=0$ について

2直線 $x+y+1=0$，$2x-y+5=0$ の交点の座標を $(a,\ b)$ とすると，

$a+b+1=0$，$2a-b+5=0$

よって，どんな定数 k をとっても $a+b+1+k(2a-b+5)=0$ が成り立つ．

$a+b+1+k(2a-b+5)=0$ は，直線 $x+y+1+k(2x-y+5)=0$ が点 $(a,\ b)$ を通ることを表している．

したがって，直線 $x+y+1+k(2x-y+5)=0$ は2直線 $x+y+1=0$，$2x-y+5=0$ の交点 $(a,\ b)$ を通る．

⇒　C&U 5

【CHECK & UP】

1　次の円の方程式を求めよ.

(1)　円 $x^2+y^2+x-3y-1=0$ と中心が同じで，半径がこの円の半径の 2 倍である円

(2)　2 点 A$(-1,\ -4)$，B$(5,\ 2)$ を直径の両端とする円

(3)　半径が 5 で，中心が y 軸上にあり，x 軸に接する円

2　円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=ax+2$ が接するとき，定数 a の値と接点の座標を求めよ.

3　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ -4)$ における接線の方程式を求めよ.
また，円 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ.

4　2 円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ と $x^2-6x+y^2-8y+16=0$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ.

5　2 円 $x^2-2x+y^2-4=0$ と $x^2+(y-1)^2=1$ の 2 つの交点を P，Q とする．次の図形を表す方程式を求めよ.

(1)　直線 PQ　　　　(2)　2 点 P，Q と点 $(2,\ 0)$ を通る円

< Note >

第22講　図形と方程式(2)

1　点 $(1,\ 2)$ を中心とする半径1の円 C と直線 l：$y=mx+1$ がある．次の問いに答えよ．

(1)　直線 l が円 C と共有点をもつような m の値の範囲を求めよ．

(2)　直線 l が円 C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，m の値を求めよ．

＜ Note ＞

2 (1)　点 $(1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ．

(2)　円 $(x-1)^2+y^2=5$ と，中心 $(a,\ b)$ で半径1の円の2つの共有点を通る直線の方程式が $x-y+2=0$ である．このとき，$(a,\ b)$ を求めよ．

< Note >

3　2円 C_1：$x^2+y^2=1$，C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$ $(r>0)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2円が異なる2交点をもつときの r の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，2円の共通弦の長さが最大となるときの r の値と，そのときの共通弦の長さを求めよ．

＜ Note ＞

第22講　図形と方程式(2)

(1)　点 $(3,\ 0)$ において x 軸に接し，かつ直線 $3y-4x=12$ に接する円の方程式は

$(x-$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2=$ ウ ，$(x-$ ア $)^2+(y+$ エオ $)^2=$ カキク

である．

(2)　2円 C_1：$x^2+y^2=16$，C_2：$x^2+y^2-4x-2y-20=0$ について，C_1，C_2 の中心間の距離は $\sqrt{\text{ケ}}$ である．この距離が2円の半径の差より大きく，和より小さいことより，2円は異なる2交点をもつことがわかる．この異なる2交点を通る直線の方程式は

$y=-$ コ $x-$ サ である．

＜ Note ＞

第 23 講　図形と方程式(3)

【基礎確認事項】

［１］　**軌跡の方程式**

□与えられた条件を満足する点が動いてできる図形を，その条件を満足する点の**軌跡**という．

例　平面上で定点Ｏから一定の距離 r にある点Ｐの軌跡は，

Ｏを中心とする半径 r の円である．

つまり軌跡とは，与えられた条件を満たす点全体の集合である．

□点Ｐの軌跡を求める手順は以下となる．

(Ⅰ)　条件を満たす点を $(X,\ Y)$ などで表し，この点が満たす条件式を求め，それがどのような図形を表すかを調べる．

(Ⅱ)　逆に(Ⅰ)で求めた図形の任意の点Ｐが，条件を満足することを確かめる．

(Ⅱ)については，(Ⅰ)の計算を逆にたどることによって成り立つことがわかる場合が多い．このように同値性が保たれている場合は，逆の証明を簡単に述べる，または省略することが多い．

□軌跡を求めるときは，

・軌跡を求める点をあらかじめ $(X,\ Y)$ とおき，それを条件にしたがって利用する場合

・条件にしたがって軌跡を求める点を表し，それを $(X,\ Y)$ と置き換える場合

に大きく分かれる．

□また軌跡を求める点以外に動くことができる点が存在する場合は，その点を別の文字で設定した上で，条件にしたがって軌跡を求める点を表し，それを $(X,\ Y)$ と置き換える．
置き換えた場合は，X，Y のそれぞれが別の文字で表されている．これを**媒介変数**（パラメータ）という．これらの式からパラメータを消去して１つの式にすることで，軌跡を表す方程式を作成することができる．

⇒　C&U ① ②

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　2点A(1, 0)，B(0, 2) に対し，AP：BP＝1：2 を満たす点Pの軌跡を求めよ．

2　a が実数のとき，放物線 $y=x^2+2ax-1$ の頂点Pが描く軌跡を求めよ．

< Note >

第23講　図形と方程式(3)

1 (1) 点Pから2円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$ に引いた接線の長さの比が $2:1$ であるという．点Pの軌跡を求めよ．

(2) 放物線 $y=x^2+(4-4a)x+4a-4$ の頂点をPとする．$0<a\leqq 2$ のとき，頂点Pの描く軌跡を求めよ．

＜ Note ＞

2　点Pが円 $x^2+y^2-4x=0$ 上を動くとき，3点A(0，0)，B(2，−2)，Pを頂点とする三角形ABPの重心Gの軌跡を求めよ．

< Note >

3　放物線 $C：y=x^2$ と直線 $l：y=m(x+2)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C と l が異なる2点A，Bで交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ．

＜ Note ＞

第23講　図形と方程式(3)

定点O(0, 0), A(4, 2) と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ の周上を動く点Pがある．次の問いに答えよ．

(1)　3点O, A, Pが同一直線上にあるとき，点Pの座標は (4, 2) または

$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\right)$ である．

(2)　△OAPの重心の軌跡は，中心 $\left(\boxed{オ},\ \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\right)$，半径 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ の円である．ただし，点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$, $\left(\dfrac{\boxed{コ}}{5},\ \dfrac{\boxed{サ}}{5}\right)$ を除く．

＜ Note ＞

第24講　図形と方程式(4)

【基礎確認事項】

［1］　不等式の表す領域

□x，y に関する不等式があるとき，それを満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その不等式の表す**領域**という.

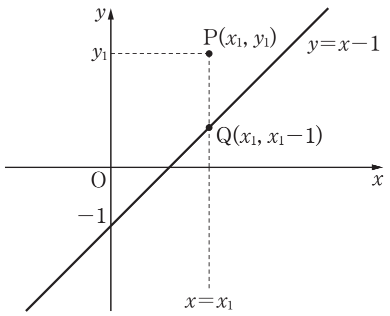
例　$y>x-1$ の表す領域について
点 $P(x_1,\ y_1)$ がこの領域にあれば，

$y_1>x_1-1$

が成り立つ.
また，直線 $x=x_1$ と $y=x-1$ との交点を Q とすると

$Q(x_1,\ x_1-1)$

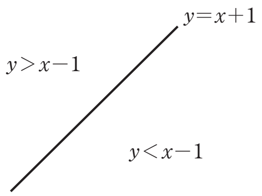
である．$y_1>x_1-1$ より，点 P は点 Q より上側にある.
したがって，点 P は直線 $y=x-1$ より上側にある.
同様に，$y<x-1$ の表す領域は，直線　$y=x-1$ より下側にある.



□一般に，直線 $l：y=ax+b$ を境界とする領域について次のことがいえる.

（i）　不等式 $y>ax+b$ の表す領域は，直線 l の上側の部分
（ii）　不等式 $y<ax+b$ の表す領域は，直線 l の下側の部分

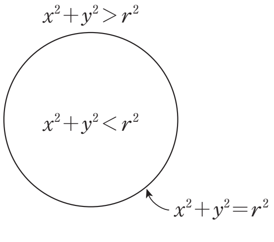
いずれも，境界は含まない.
領域を図示する場合は，境界を含む，含まないについて明記する必要がある.



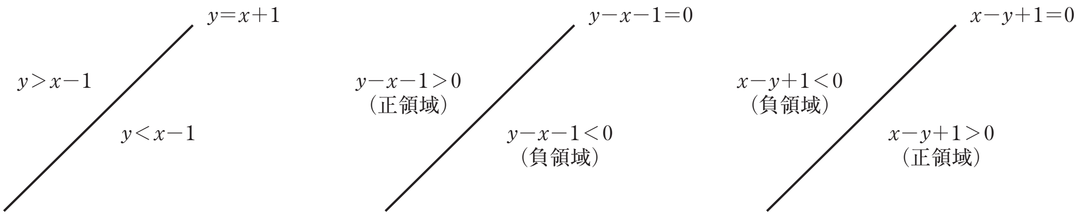
□原点を中心とする半径 r の円 C を境界線とする領域について，次のことがいえる.

（i）　不等式 $x^2+y^2<r^2$ の表す領域は，円 C の内部
（ii）　不等式 $x^2+y^2>r^2$ の表す領域は，円 C の外部

いずれも，境界は含まない.



□一般に $f(x,\ y)>0$ で表される領域を**正領域**，$f(x,\ y)<0$ で表される領域を**負領域**という．不等号の向きと，境界線を境とした領域の上下，内外に注意.



⇒　C&U 1

【CHECK & UP】

1　次の連立不等式が表す領域を図示せよ．

(1) $\begin{cases} y > x+1 \\ y > -x+1 \\ y < 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+2y+2 \leqq 0 \\ y \geqq -x^2-2x \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+y-4 < 0 \\ x^2+y^2 \leqq 4 \end{cases}$

＜ Note ＞

第24講　図形と方程式(4)

1　$|x|+|y|\leqq 1$ ならば $(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$ が成り立つことを証明せよ.

＜ Note ＞

2　実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 5$，$y \geqq 2x$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

＜ Note ＞

3 (1) 2点をA$(-2,\ -1)$，B$(3,\ 2)$とする．線分ABが直線$y=ax+1$と共有点をもたないとき，定数aの値の範囲を求めよ．

(2) 放物線$y=-x^2+x+2$上の任意の点をP，直線$y=-2x+6$上の任意の点をQとする．このとき，線分PQの長さの最小値を求めよ．

＜ Note ＞

第24講　図形と方程式(4)

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$, $y \geqq -x$ で表される領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内の点であるとき，$3x+4y$ は $x=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，$y=\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ をとり，$x=\boxed{ク}$，$y=-\boxed{ケ}$ のとき最小値 $-\boxed{コ}$ をとる．

< Note >

CHECK & UP 解答

第1講　数と式・方程式・不等式

【CHECK & UP】

1　$\boldsymbol{x^2+(5-3y)x+4y^2-y+2}$

〔$x^2-(3y-5)x+4y^2-y+2$　も可〕

次数　**2次**　　　定数項　$\boldsymbol{4y^2-y+2}$

> x に着目すると，y も数字扱いとなる．ただし数字扱いとはいえ，y についての式としては降べきの順にしておこう．今回の定数項がそれである．また，同類項をまとめる際にマイナスでくくるか否かはその後の目的によって異なる．その目的によっては，$(-3y+5)x$ という変形も計算途中においてはあり得ることを知っておこう．

2　$A=-2a^2+a+3$，$B=a^2+2a-1$ のとき

$A+B=(-2a^2+a+3)+(a^2+2a-1)=\boldsymbol{-a^2+3a+2}$

$B-2A=(a^2+2a-1)-2(-2a^2+a+3)$

$\quad=a^2+2a-1+4a^2-2a-6=\boldsymbol{5a^2-7}$

$AB=(-2a^2+a+3)(a^2+2a-1)$

$\quad=-2a^4-4a^3+2a^2+a^3+2a^2-a+3a^2+6a-3$

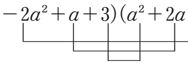
$\quad=\boldsymbol{-2a^4-3a^3+7a^2+5a-3}$

（※　$AB=(-2a^2+a+3)(a^2+2a-1)$

$\quad=-2a^4+(-4+1)a^3+(2+2+3)a^2+(-1+6)a-3$

$\quad=-2a^4-3a^3+7a^2+5a-3$ ）

> A，B ともに a について降べきの順にしておくと，同類項をまとめる際の計算ミスが減る．

> 積 AB については，次数が高くなること，項数が多くなることにより計算ミスが多くなる．1つ1つ落ち着いて展開するのは当然であるが，※のように「同類項」になるものを見つけながら開くスキルも身につけるとよい．例えば a^2 になる項は以下．
>
> $(-2a^2+a+3)(a^2+2a-1)$
>
> 
>
> 特に最高次数と最低次数（定数項）となる項に注目しておくと後々役立つであろう．

3　(1)　$(2a-3b)^3$

$\quad=(2a)^3-3\cdot(2a)^2 3b+3\cdot 2a(3b)^2-(3b)^3$

$\quad=\boldsymbol{8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3}$

> (1)　3乗が絡む展開公式は数学Ⅱの範囲であるが，学校等で同時に指導されることを想定し，このタイミングで練習しておきたい．

(2)　$(x+1)^3(x^2-x+1)^3=\{(x+1)(x^2-x+1)\}^3$

$\quad=(x^3+1)^3=\boldsymbol{x^9+3x^6+3x^3+1}$

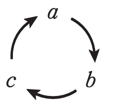
> (2)　指数法則により $a^n b^n=(ab)^n$ である．
> 3乗の中の展開については
> $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$
> を暗記していなくても，上記の「同類項」に注目すれば簡単に導くことができる．

(3)　$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

$\quad=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$\quad=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

> (3)　置き換え的発想による展開．また，問題文の形が「輪環」の形となっていることから答えも輪環の形とした．
> この展開の結果は公式として暗記しておこう．
>
> 
>

(4)　$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$\quad=(x^3+xy^2+z^2x-x^2y-xyz-zx^2)$

$\qquad+(x^2y+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz)$

$\qquad\quad+(zx^2+y^2z+z^3-xyz-yz^2-z^2x)$

$\quad=\boldsymbol{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

> (4)　3種類の文字の展開．やはり輪環の形であるため，どれかの文字に着目することなく展開した．
> この結果は，展開の公式ではなく「因数分解の公式」として暗記しておこう．

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

4

(1) $6x^2-x-2$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & -2 & \longrightarrow & -4 \\ 2 & \times & 1 & \longrightarrow & 3 \\ & & & & \overline{-1} \end{array}$$

$=\mathbf{(3x-2)(2x+1)}$

(2) $8a^3-27b^3=(2a)^3-(3b)^3$

$=\mathbf{(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)}$

> (2)　3乗が絡む因数分解の公式は数学Ⅱの範囲であるが，学校等で同時に指導されることを想定し，このタイミングで練習しておきたい．

(3) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)-9$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)-9$

$=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+96$

$=(x^2+8x+16)(x^2+8x+6)$

$=\mathbf{(x+4)^2(x^2+8x+6)}$

> (3)　そのままでは因数分解が困難であるため，後に置き換え的発想による展開が使える組合せで展開した．展開が目的ではないため，定数項を１つにした後に因数分解に切り替わっている．

(4) $x^4+3x^2-4=(x^2)^2+3x^2-4$

$x^2=X$ とおくと

$X^2+3X-4=(X+4)(X-1)=(x^2+4)(x^2-1)$

$=\mathbf{(x^2+4)(x+1)(x-1)}$

> (4)　x の偶数乗の項と定数項のみの式を複二次式という．置き換えにより既知の解法に持ち込むことができる問題である．

5

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}-\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{\sqrt{15}+3}{5-3}-\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{3-1}=\dfrac{\sqrt{15}+3-\sqrt{15}-\sqrt{5}}{2}$

$=\mathbf{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

(2) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}=\sqrt{12-2\sqrt{27}}=\sqrt{(9+3)-2\sqrt{9\cdot 3}}$

$=\sqrt{9}-\sqrt{3}=\mathbf{3-\sqrt{3}}$

> (2)　$\sqrt{3}-3$ は間違いである．$\sqrt{3}<3$ であることより $\sqrt{3}-3<0$，つまりマイナスとなって問題文の符号と一致しない．

6

(1) $\dfrac{1}{2}x+1\geqq\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{6}$ より　$3x+6\geqq 8x-1$

$-5x\geqq -7$　　よって　$\mathbf{x\leqq\dfrac{7}{5}}$

> (1)　不等式においては，マイナスの数を両辺に掛ける，または割るときに不等号の向きが変わるほかは，方程式と同じように計算できる．

(2) $\dfrac{2x-1}{3}<\dfrac{x+6}{2}$　より　$4x-2<3x+18$

つまり　$x<20$　……①

$\dfrac{x+6}{2}\leqq\dfrac{3x+7}{4}$　より　$2x+12\leqq 3x+7$

$-x\leqq -5$　つまり　$x\geqq 5$　……②

①と②の共通部分を求めて，$\mathbf{5\leqq x<20}$

> (2)　$A<B<C$ の形の不等式は，$A<B$ と $B<C$ の連立不等式として解く．
> ちなみに B の部分にのみ x の項を含む場合は，3辺に同時に同じ操作を行うことで解くことができる．例えば
> $-2<3x+5<7$ は各辺から５を引いて，
> $-7<3x<2$，各辺を３で割って
> $-\dfrac{7}{3}<x<\dfrac{2}{3}$ と解くことができる．

(3)　$ax<1$ について

　$a>0$ のとき　$x<\frac{1}{a}$

　$a<0$ のとき　$x>\frac{1}{a}$

　$a=0$ のとき　$0\cdot x<1$ より　**x はすべての実数**

(4)　$ax>1$ について

　$a>0$ のとき　$x>\frac{1}{a}$

　$a<0$ のとき　$x<\frac{1}{a}$

　$a=0$ のとき　$0\cdot x>1$ より　**解なし**

(3)(4)　未定係数 a が入っている問題である．a を掛けたり割ったりするときには，その符号により「場合分け」が必要となる．
特に $a=0$ のときは a で割ることができない．そもそも方程式や不等式を解くとは，その式を成り立たせる値をすべて求めることである．ax において $a=0$ のときは x も共に消えてしまうが，消えた後の式が成立するなら，それは x に何を代入したとしても成立する，つまり「すべての実数が解」ということである．逆に消えた後の式が成立しないなら，それは x に何を代入したとしても成立しない，つまり「解がない」，ということである．前者が(3)，後者が(4)である．

7 (1)　$|x-2|=4$ より　$x-2=\pm 4$　　よって　**$x=6,\ -2$**

(2)　$|x+1|\leqq 3$ より　$-3\leqq x+1\leqq 3$

　各辺から1を引くことにより　**$-4\leqq x\leqq 2$**

(2)　$A<B<C$ の形の不等式において，B の部分にのみ x の項を含む場合は，3辺に同時に同じ操作を行うことで解くことができる．

(3)　$|2x-1|>4$ より　$2x-1<-4,\ 4<2x-1$

　$2x<-3,\ 5<2x$　　よって　**$x<-\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}<x$**

(4)　$|x+1|=3x$

　$x\geqq -1$ のとき　$x+1=3x$

　　$x=\frac{1}{2}$　これは $x\geqq -1$ を満たす．

　$x<-1$ のとき　$-x-1=3x$

　　$x=-\frac{1}{4}$　これは $x<-1$ を満たさず不適．

　以上より　**$x=\frac{1}{2}$**

(4)　$|x+1|=3x$ において，この式の左辺は0以上であることより，右辺も0以上でなければならない．よって，$3x\geqq 0$ すなわち $x\geqq 0$ であり，等式を満たしこの範囲に入る x の値がこの式の解である．そのことを踏まえた上で，(1)同様に $x+1=\pm 3x$ として解くことも可能である．
左記の解答と上記の解答，いずれにしても導き出した値が満たすべき範囲を満たすかを検証する必要がある．

第2講　2次関数(1)

【CHECK & UP】

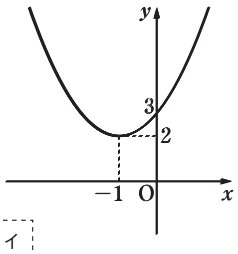
1 (1) $y=x^2+2x+3$

$=(x+1)^2-1+3$

$=(x+1)^2+2$

> (1) x^2 の係数が1であるため，x^2 の係数でくくるというステップはない．先頭から2つの項で2乗の形をつくる際に，x の係数2を半分の1にし，展開すると出てくる不要な1を引く．

軸　$\boldsymbol{x=-1}$　　頂点　$\boldsymbol{(-1,\ 2)}$　　よって，グラフは右図．



(2) $y=-2x^2+2x-1$

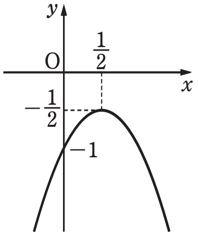
$=-2(x^2-x)-1$

$=-2\left\{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right\}-1$

$=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}-1$

$=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

> (2) x^2 の係数 -2 で先頭の2項をくくる．マイナスでくくったため x の係数の符号が ± 逆になっている．2乗の形をつくる際にカッコで囲うため，その前にあったカッコが中括弧｛　｝に変わっていることに注意．2乗の形においては x の係数 -1 を半分の $-\dfrac{1}{2}$ にし，その2乗 $\dfrac{1}{4}$ を引く．さらに x^2 の係数 -2 を分配することで，$-\dfrac{1}{4}$ が $\dfrac{1}{2}$ となっている．慣れてくると暗算でできる部分が出てくるが，符号ミス，分配ミスに注意．



軸　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}}$　　頂点　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)}$　　よって，グラフは右図．

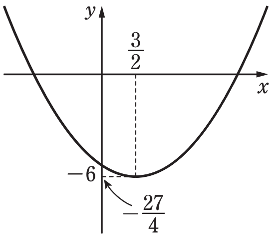
(3) $y=\dfrac{1}{3}x^2-x-6$

$=\dfrac{1}{3}(x^2-3x)-6$

$=\dfrac{1}{3}\left\{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\right\}-6$

$=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}-6=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{27}{4}$　　軸　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$　頂点　$\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{27}{4}\right)}$

> (2) x^2 の係数が分数の場合は，くくるときにその逆数を x の係数に掛ける．



よって，グラフは右図．

2 $y=2x^2-4x=2(x^2-2x)=2\{(x-1)^2-1\}=2(x-1)^2-2$

この放物線の頂点は $(1,\ -2)$ である．

(1) x 軸方向に2，y 軸方向に -3 平行移動すると，頂点は $(3,\ -5)$ に移動する．よって求める式は

$\boldsymbol{y=2(x-3)^2-5}$　$(y=2x^2-12x+13)$

> (1) 平行移動は，x^2 の係数は変わらず頂点の座標が変化する．移動後の式は平方完成された形のままでよく，必要に応じて展開する．

(2) x 軸に関して対称に移動すると，頂点は $(1,\ 2)$ に移動し，凸方向が逆となる．よって求める式は

$\boldsymbol{y=-2(x-1)^2+2}$　$(y=-2x^2+4x)$

> (2)(4) 対称移動により凸方向が変わる場合は，x^2 の係数の ± を逆にする必要がある．移動はグラフを頭にイメージすること．

(3) y 軸に関して対称に移動すると，頂点は $(-1,\ -2)$ に移動する．よって求める式は

$\boldsymbol{y=2(x+1)^2-2}$　$(y=2x^2+4x)$

(4) 原点に関して対称に移動すると，頂点は $(-1,\ 2)$ に移動し，凸方向が逆となる．よって求める式は

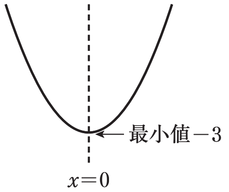
$\boldsymbol{y=-2(x+1)^2+2}$　$(y=-2x^2-4x)$

第3講　2次関数(2)

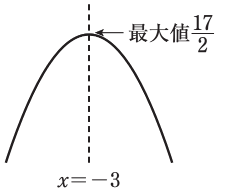
【CHECK & UP】

1

(1)



(2)

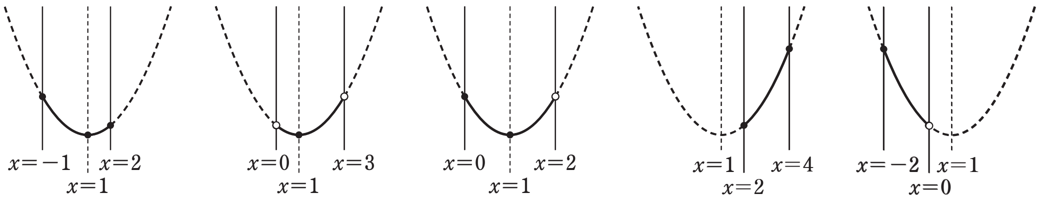


> 凸方向に注意しながらグラフの概形をかく．最大・最小を考えるだけであればグラフは x 軸，y 軸を必ずしも必要としない．グラフをかくときには，臨機応変に必要な部分のみをかくことが今後必要となってくるであろう．

(1)　最大値**なし**　最小値 **－3**　　値域 $\boldsymbol{y \geqq -3}$

(2)　$y=-\frac{1}{2}x^2-3x+4=-\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{17}{2}$　最大値 $\boldsymbol{\frac{17}{2}}$　最小値**なし**　値域 $\boldsymbol{y \leqq \frac{17}{2}}$

2　$y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$　　軸：$x=1$



(1)　最大値 **5**　最小値 **1**　　値域 $\boldsymbol{1 \leqq y \leqq 5}$

(2)　最大値**なし**　最小値 **1**　　値域 $\boldsymbol{1 \leqq y < 5}$

(3)　最大値 **2**　最小値 **1**　　値域 $\boldsymbol{1 \leqq y \leqq 2}$

(4)　最大値 **10**　最小値 **2**　　値域 $\boldsymbol{2 \leqq y \leqq 10}$

(5)　最大値 **10**　最小値**なし**　　値域 $\boldsymbol{2 < y \leqq 10}$

> 下に凸の放物線の場合，その定義域において，最大値は軸から最も遠いところでとり，最小値は軸に最も近いところ（軸が含まれれば，軸のところ）でとる．定義域に等号が含まれていない場合は注意．
> 　また定義域に等号が含まれず最大値や最小値が存在しない場合でも，値域には値が現れることがある．

3　(1)　頂点が $(1,\ 2)$ より，$y=a(x-1)^2+2$ とおく．

点 $(2,\ 5)$ を通るので　$5=a(2-1)^2+2$　　$a=3$

よって，求める2次関数は　$\boldsymbol{y=3(x-1)^2+2}$

(2)　$x=2$ で最大値3をとるので，$y=a(x-2)^2+3$ とおける．

ただし $a<0$ である．さらに点 $(0,\ -1)$ を通るので

$-1=a(0-2)^2+3$　　$a=-1$　　これは $a<0$ を満たす．

よって，求める2次関数は　$\boldsymbol{y=-(x-2)^2+3}$

(3)　最小値が -1 なので，$y=a(x-p)^2-1$　とおける．

ただし $a>0$ である．さらに2点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$ を通るので

$1=ap^2-1$　……①　　$1=a(2-p)^2-1$　……②

①より $ap^2=2$　　②より $a(2-p)^2=2$

よって　$ap^2=a(2-p)^2$

$a \neq 0$ より　$p^2=(2-p)^2$　　よって　$p=1$　このとき　$a=2$

したがって，求める2次関数は　$\boldsymbol{y=2(x-1)^2-1}$

> (2)や(3)は，変域が実数全体であるときの最大値，最小値に関する条件，すなわち頂点に関する条件である．それに加え，そのグラフの凸方向を，x^2 の係数の符号が確定する．それを答案に記しておくことで，不適な値が出てきたときにそれを排除することができる．
> 　このように，グラフなどから文字（変数）のとり得る値や符号が限定されるとわかる場合は，答案に確実に残し，解が適するかどうかのチェックをする必要がある．

(4)　求める 2 次関数を　$y=ax^2+bx+c$ とおく.

点 $(-1,\ 7)$ を通るので，$7=a-b+c$　……①

点 $(2,\ 4)$ を通るので，$4=4a+2b+c$　……②

点 $(3,\ 11)$ を通るので，$11=9a+3b+c$　……③

②－① より　$3a+3b=-3$　すなわち　$a+b=-1$　……④

③－② より　$5a+b=7$　……⑤

④，⑤より　$a=2,\ b=-3$　　このとき①より　$c=2$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=2x^2-3x+2}$

(4)　この問題においては，その解法で 3 文字についての 1 次方程式（3 元 1 次方程式）の連立方程式を扱う．基本的には 1 文字消去．特に 2 次関数の場合は定数項 c の係数は常に 1 であるため，式変形をしなければいずれか 2 式の差をとり c を消去することができる.

第４講　２次関数(3)

【CHECK & UP】

1

(1)　$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot5=5>0$　　よって，実数解は **2 個**.

(2)　$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot3=-15<0$　　よって，実数解は **0 個**.

(3)　$\dfrac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot3=0$　　よって，実数解は **1 個**.

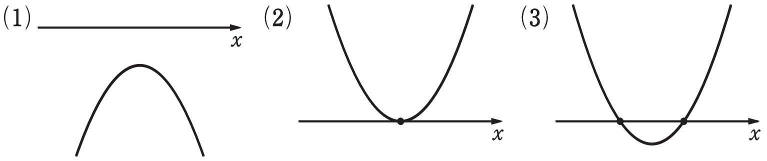
> ２次方程式の解そのものではなく解の個数が必要な場面がある．そのときにこの判別式 D が活躍する．

2

(1)　$\dfrac{D}{4}=1^2-(-3)\cdot(-1)=-2<0$　　よって，**共有点なし**.

(2)　$\dfrac{D}{4}=2^2-2\cdot2=0$　　よって，**接する**.

(3)　$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-2\cdot5=6>0$　　よって，**異なる 2 点で交わる**.



> 1と同様に D の正負により位置関係を把握する．共有点の個数と同時に，凸方向も含めたグラフの状態を意識し，単なる計算で終わらせないようにすること．

3

(1)　$2x^2-3x-2>0$　より　$(2x+1)(x-2)>0$

よって解は　$\boldsymbol{x<-\dfrac{1}{2},\ 2<x}$

(2)　$x^2-3x<0$ より　$x(x-3)<0$

よって解は　$\boldsymbol{0<x<3}$

(3)　$x^2\geqq5$ より　$x^2-5\geqq0$

$x^2-5=0$ とすると　$x^2=5$

よって　$x=\pm\sqrt{5}$

したがって解は　$\boldsymbol{x\leqq-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\leqq x}$

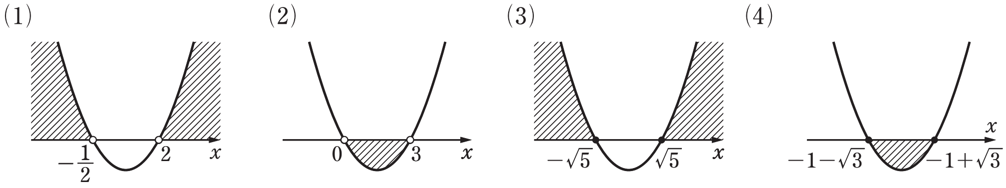
(4)　$x^2+2x-2=0$ を解いて　$x=-1\pm\sqrt{3}$

よって解は　$\boldsymbol{-1-\sqrt{3}\leqq x\leqq-1+\sqrt{3}}$

> (1)(2)　たすき掛けなどにより因数分解が思いつく場合は，因数分解することによりグラフと x 軸との交点の x 座標がわかる．その座標と放物線の形状により，２次不等式の解がわかる．無意味に(左辺)＝0 とおくことのないように．

> (3)　まずは２次方程式の解法と同様に，項を左辺に集中させる．$x^2-5=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$ と思いつけば(1)(2)と同様に解くことができるが，思いつかない場合は (左辺)＝0 として２次方程式を解けば，グラフと x 軸の交点の x 座標がわかる．

> (4)　x^2+2x-2 が因数分解「できない」のではない．因数分解を無理数の範囲に拡張すれば $x^2+2x-2=(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$ となる．これを思いつく人は多くはないと思われる．よって２次方程式にして解の公式を使い，x 軸との交点の x 座標を求めよう．



4

(1)　$x^2-6x+9>0$ より $(x-3)^2>0$

よって解は　**$\boldsymbol{x=3}$ 以外のすべての実数**

(2)　$x^2-6x+9\geqq0$ より　$(x-3)^2\geqq0$

よって解は　**すべての実数**

> (1)(2)　3では２次不等式の等号の有無は解の等号の有無と一致していたが，「接する」場合はそう単純ではない．そもそも不等式に「等号が入る」ときは，該当箇所の点を「含む」ということであり，「等号がないときは，該当箇所の点を「含まない」ということである．(1)の解にグラフと x 軸との共有点の x 座標である $x=3$ を含めると(2)の解となる．

(3)　$4x^2+4x+1<0$ より　$(2x+1)^2<0$

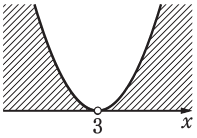
よって，解は　**ない**

(4)　$4x^2+4x+1\leqq 0$ より　$(2x+1)^2\leqq 0$

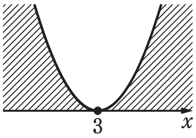
よって，解は　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$

> (3)(4)　グラフを見るとわかるように，x 軸より下の部分にグラフは存在しない．よって(3)(4)ともに <0 としての解はないが，(4)では等号があるため，グラフと x 軸との共有点（接点）の x 座標である $-\frac{1}{2}$ のみが解に入る．

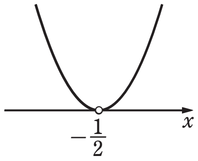
(1)



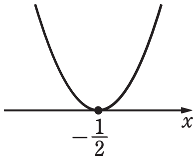
(2)



(3)



(4)



5　(1)　$D=1^2-4\cdot 1\cdot 3=-11<0$　であり，

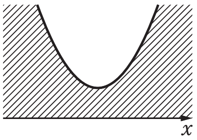
x^2 の係数が正より，解は　**すべての実数**

(2)　$-2x^2+2x-3\geqq 0$　より　$2x^2-2x+3\leqq 0$

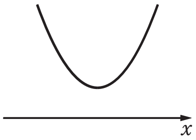
$\frac{D}{4}=1^2-2\cdot 3=-5<0$　であり，

x^2 の係数が正より，解は　**ない**

(1)



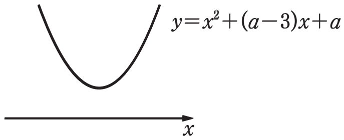
(2)



> 因数分解が思いつかず，かつ２次方程式の解の公式を使う際，D の値の符号がマイナスになったらそれはグラフと x 軸が共有点をもたないということである．おそらく多くの人が解の公式を使い，ルートの中がマイナスになって「あっ」と気づいたであろう．必ずしも D の計算から始める必要はないが，解の公式を使った「跡」が答案に残ることもなく，左の解答例のように，まるで「最初から思いついていたかのように」D から書き始めればよい．
>
> 　あとはグラフの凸方向を確認した上で，x 軸より上や下にグラフが「すべて存在する」か「全く存在しない」を解として答えればよい．この凸方向の確認は必須であり，左では x^2 の符号についての記述とした．答案にグラフをかかないのであればその代わりにこの記述が有効である．

第5講　2次関数(4)

【CHECK & UP】



1 $x^2+(a-3)x+a>0$ について

x^2 の係数が正であることより，$D<0$ であればよい．

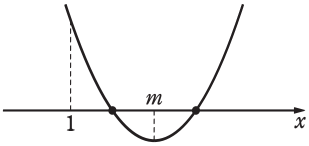
$D=(a-3)^2-4a<0$

$a^2-10a+9<0$　より　$(a-1)(a-9)<0$

よって　$\boldsymbol{1<a<9}$

> 左辺を2次関数とみることにより，下に凸の放物線のグラフを頭に描くこと．それが >0 すなわち x 軸よりすべて上にあるとき，x 軸との共有点が存在しないことがわかる．それを $D<0$ で処理するのである．

2 $f(x)=x^2-2mx+m+2=0$ とおくと，



$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=m$ である．

$f(1)=1-2m+m+2=-m+3$

$\dfrac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+2)=m^2-m-2=(m-2)(m+1)$

題意を満たすのは，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と

異なる2点で交わるときである．それは以下の条件をすべて満たすときである．

$f(1)>0$　より　$-m+3>0$　よって　$m<3$　……①

軸について　$m>1$　……②

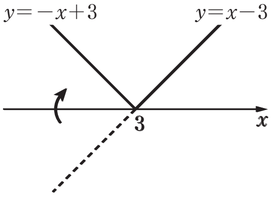
$D>0$ より　$(m-2)(m+1)>0$

$m<-1,\ 2<m$　……③

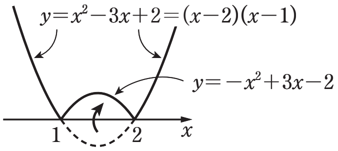
①～③の共通部分を求めて　$\boldsymbol{2<m<3}$

> 解の配置に必要な条件を考えることは，今後，ある条件を満たすために必要なことを考えて発見する力につながる．判別式・軸・端点と暗記するのではなく，なぜこれらの条件が必要なのかを考えて処理できるようにしたい．

3 (1)



(2)



> 絶対値を「場合分け」することにより，式とそれが存在する範囲が得られて図示ができる．ここではその考え方に基づき，$y=|f(x)|$ という「x 軸対称変換」のグラフを，場合分けのプロセスを略して描く練習である．もちろん，折り返した式と，それぞれが存在する範囲を把握しておくこと．

4 $y=x^2-2x+1$ と $y=2x-3$ より　y を消去して

$x^2-2x+1=2x-3$　　　$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$　　よって　$x=2$（重解）

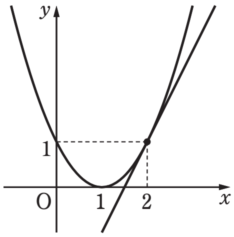
よって2つのグラフの共有点の座標は $\boldsymbol{(2,\ 1)}$ であり，

この点において放物線と直線は接する．

また　$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$

以上より，放物線と直線のグラフは右図．

> 放物線と直線の共有点やその位置関係が話題になるのは数学Ⅱに入ってからである．ここでは放物線の形状や x 軸，y 軸との交点に注目しつつグラフをかく練習に留める．



第6講　三角比(1)

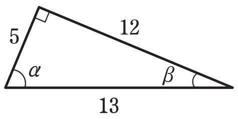
【CHECK & UP】

1

(1) $\boldsymbol{\sin\alpha=\frac{12}{13}}$　(2) $\boldsymbol{\cos\alpha=\frac{5}{13}}$

(3) $\boldsymbol{\tan\alpha=\frac{12}{5}}$　(4) $\boldsymbol{\sin\beta=\frac{5}{13}}$

(5) $\boldsymbol{\cos\beta=\frac{12}{13}}$　(6) $\boldsymbol{\tan\beta=\frac{5}{12}}$



直角三角形において，それぞれの三角比がどの2辺の比を表すのかを理解すること．
　また，α と β がそれぞれ余角 $90^\circ-\theta$ の関係になっていることに注目し，$90^\circ-\theta$ と θ の三角比の関係を頭に入れたい．

2

(1) $\boldsymbol{\sin 0^\circ=0}$　$\boldsymbol{\cos 0^\circ=1}$

(2) $\boldsymbol{\sin 30^\circ=\frac{1}{2}}$　$\boldsymbol{\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\boldsymbol{\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}}$　$\boldsymbol{\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(4) $\boldsymbol{\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}}$　$\boldsymbol{\cos 60^\circ=\frac{1}{2}}$

(5) $\boldsymbol{\sin 90^\circ=1}$　$\boldsymbol{\cos 90^\circ=0}$

(6) $\boldsymbol{\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}}$　$\boldsymbol{\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}}$

(7) $\boldsymbol{\sin 135^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}}$　$\boldsymbol{\cos 135^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(8) $\boldsymbol{\sin 150^\circ=\frac{1}{2}}$　$\boldsymbol{\cos 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(9) $\boldsymbol{\sin 180^\circ=0}$　$\boldsymbol{\cos 180^\circ=-1}$

この問題で出題された角度は「有名角」と呼ばれる．そのときの sin と cos の値もまた有名なものである．最初は直角三角形をイメージする必要があるかもしれないが，徐々に角度とその三角比の値をダイレクトでつなげられるようにしたい．さらにその値を，単位円の円周上の点の座標と視覚的につなげられるようになるとベスト．

3

(1) $\sin 105^\circ=\sin(180^\circ-75^\circ)=\sin 75^\circ$
$=\sin(90^\circ-15^\circ)=\boldsymbol{\cos 15^\circ}$

(2) $\cos 110^\circ=\cos(180^\circ-70^\circ)=-\cos 70^\circ$
$=-\cos(90^\circ-20^\circ)=\boldsymbol{-\sin 20^\circ}$

(3) $\tan 155^\circ=\tan(180^\circ-25^\circ)=\boldsymbol{-\tan 25^\circ}$

与えられた角を $90^\circ-\theta$ や $180^\circ-\theta$ の形で表すことができれば，θ の三角比に変えることができる．$90^\circ-\theta$ や $180^\circ-\theta$ の形に表し直したときはまだ三角比の種類はそのままである．

第7講　三角比(2)

【CHECK & UP】

1

(1) $\tan 0^\circ = 0$　　(2) $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\tan 45^\circ = 1$　　(4) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(5) $\tan 90^\circ$ はない　　(6) $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

(7) $\tan 135^\circ = -1$　　(8) $\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(9) $\tan 180^\circ = 0$

> 同じく「有名角」の正接の値の問題．やはり最初は直角三角形をイメージする必要があるかもしれないが，徐々に角度とその三角比の値をダイレクトでつなげられるようにしたい．特に tan は原点を通る直線と直線 $x=1$ との交点を意識すること．角度の変化により高さが無限に上下するイメージとなる．

2

2直線 $y=\sqrt{3}x+1$ と $y=\sqrt{3}x$ は，x 軸の正の方向とのなす角が等しい．

よって $\tan\theta=\sqrt{3}$　より　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

> 2直線 $y=mx+n$ と $y=mx$ は傾きが等しく m であるため「平行」である．よって平行線と角の性質により x 軸の正の方向とのなす角が等しい．

3

(1) $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ より $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

θ が鈍角より $\cos\theta<0$ であるから　$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

このとき　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$

> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の公式は
> 　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$　や
> 　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$　の形で
> 用いられることが多い．
> 　θ が鋭角ならば $\cos\theta$，$\tan\theta$ は正
> 　θ が鈍角ならば $\cos\theta$，$\tan\theta$ は負
> である．角が鋭角か鈍角かが不明なときは「場合分け」が必要となる．
> $\sin\theta$ は鋭角・鈍角に関わらず正である．

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において $\tan\theta=-2$ より θ は鈍角である．

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=5$　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\cos\theta<0$ より　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-2\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

> $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ においては
> 　$\cos\theta$，$\tan\theta$ が正ならば θ は鋭角
> 　$\cos\theta$，$\tan\theta$ が負ならば θ は鈍角
> である．問題文に明確に「鋭角」,「鈍角」に関する表記がなくとも上記のことに留意して各三角比の符号を決定すること．

第８講　三角比と平面図形(1)

【CHECK & UP】

1 (1)　最大辺の大きさは 6 である．

$(4-3<)6<3+4$ より　3，4，6 を 3 辺とする三角形は**存在する**．

また，$6^2=36$，$3^2+4^2=25$ より　$3^2+4^2<6^2$ であるから，この三角形は**鈍角三角形**である．

(2)　最大辺の大きさは 12 である．

$(10-9<)12<9+10$ より　9，10，12 を 3 辺とする三角形は**存在する**．

また，$12^2=144$，$9^2+10^2=181$ より　$9^2+10^2>12^2$ であるから，この三角形は**鋭角三角形**である．

(3)　最大辺の大きさは 13 である．

$(12-5<)13<5+12$ より　5，12，13 を 3 辺とする三角形は**存在する**．

また，$13^2=169$，$5^2+12^2=169$ より　$5^2+12^2=13^2$ であるから，この三角形は**直角三角形**である．

(4)　最大辺の大きさは 16 である．

$16>5+10$ より　5，10，16 を 3 辺とする三角形は**存在しない**．

「三角形がある」というように明確に存在が保証されているならば，三角形が存在するかの検証は通常は必要ない．大切なのは，三角形の３辺の中で，「鈍角になる資格があるのは最大辺の対角ただ１つ」ということ．よって，３辺のうち最大辺に注目することが，三角形の形状を知り，自分で図示するときに役に立つのである．
　最大辺が明確であればそれをベースに三角形の存在や角が鈍角か否かがすぐにわかるが，そうでない場合は，ある辺が他の２辺の「差より大きく和より小さい」ことを立式する必要がある．もちろん，各辺が正であることは言うまでもない．
　また，最大辺がわからないまでも，一番長くはなれない辺，つまり「最大辺になり得ない」辺も把握しておくとよい．その対角は確実に鋭角である．

2 (1)　正弦定理より　$\dfrac{b}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}$

つまり　$\dfrac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

よって　$b=4\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

また正弦定理より　$2R=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}$

よって　$R=\dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

(1)　正弦定理の利用の基礎練習である．分数の分母や分子にさらに分数が入る場合がある．分子の場合はそのまま下ろせばいいが，分母の場合は逆数にして掛け算にする．ただし，方程式の性質を使って「分母を払った場合」は，払った分母がそのままもう一方にくる．(1)の２行目では「$\sqrt{2}$」が逆数になった例であり，「$\frac{\sqrt{3}}{2}$」が払われて移ってきた例である．
今回の主役は「b」であるため，「$\frac{\sqrt{3}}{2}$」を払って右辺にそのまま移動させたのである．
　また，外接円の半径 R については，対角・対辺の関係にあるもののうち，どれか１つのペアの比を使う．また，方程式であるから両辺を「割る」ということに注意を払っておくとよい．

(2)　正弦定理より　$2\cdot5=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin A}$

よって　$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\boldsymbol{A=60^\circ,\ 120^\circ}$

(2)　外接円の半径 R がわかっていることも多い．その場合は，それを２倍したものとどれか１ペアの比を＝で結ぶ．立式したあと，今回は両辺を５で割り，さらに主役である「$\sin A$」を「払って」そのまま左辺へ，逆にいらない「2」を「割って」右辺へもっていった．sin の値により鋭角と鈍角の２つが出てきた．そのことによって内角の和が 180° をオーバーしてしまうことのないように．また，明らかに最大辺でないのにその対角が鈍角になることのないように．

3 (1)　余弦定理より

$$c^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos120^\circ$$
$$=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$$

$c>0$ より　$\boldsymbol{c=7}$

(1)　2辺夾角（2辺とその間の角）型の余弦定理の練習．最もオーソドックスな形の1つである．もっとも注意すべきポイントの1つは，「鈍角」のときは「cos の値がマイナス」であること．余弦定理の公式のマイナスとあわせてプラスになることを練習によってたたき込んでおくとよい．

(2)　余弦定理より

$$\cos B=\frac{1^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot1\cdot\sqrt{2}}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$\boldsymbol{B=135^\circ}$

(2)　3辺型の余弦定理もまた頻出の形である．cos の値がマイナスなら鈍角．(2)で B を調べる問題であるが，b が最大辺なのでその対角である B の大きさを調べるのは合理的．ただし，いつでも角度が明確に出るとは限らないが．

(3)　余弦定理より

$$(\sqrt{13})^2=c^2+4^2-2\cdot c\cdot4\cdot\cos60^\circ$$
$$c^2-4c+3=0\qquad よって\quad \boldsymbol{c=1,\ 3}$$

(3)　2辺と「その間ではない角」に関する問題．b と B がともにわかっているため「正弦定理」の利用も可能であるが，直接 c が出ない（$A\to C\to c$ の順）ため今回の問題の解法としては適さない．

4 (1)　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{10}$

(2)　余弦定理より　$\cos A=\frac{25+9-49}{2\cdot5\cdot3}=\frac{-15}{2\cdot5\cdot3}=-\frac{1}{2}$

このとき　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$

【別解】　$s=\frac{1}{2}(7+5+3)=\frac{15}{2}$ とすると

$$\triangle ABC=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\left(\frac{15}{2}-7\right)\cdot\left(\frac{15}{2}-5\right)\cdot\left(\frac{15}{2}-3\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{15\cdot1\cdot5\cdot9}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$$

三角比の知識を用いることにより，三角形の面積は「2辺とその間の角」により求められる．(2)のように3辺の長さがわかっている場合も，余弦定理により角度（の三角比）が求められ，それにより面積を求めることができる．もちろんヘロンの公式も有効であるが，(2)のように「3辺の和が偶数にならない」場合は計算に少々手間がかかることがある．

第９講　三角比と平面図形(2)

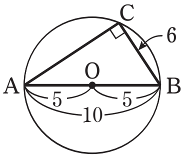
【CHECK & UP】

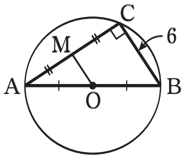
1　図より AC＝8，AB＝10

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{8}{10}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

また，M は AC の中点であることから，

中点連結定理により　$OM=\dfrac{1}{2}BC=\mathbf{3}$





「直径→円周角 90°」に加え，直角三角形の斜辺がその外接円の直径であることを，その図を描くことと同時に利用できるようにすること．
　また，その中心から各辺（弦）に下ろした垂線がその辺を二等分することも必須の知識である．
　「直角」で「三角比の利用」を想定できるようになればしめたものである．

2　内角の二等分線の性質より BD：DC＝AB：AC＝3：2

　　よって　$DC=\dfrac{2}{5}BC=2$

外角の二等分線の性質より

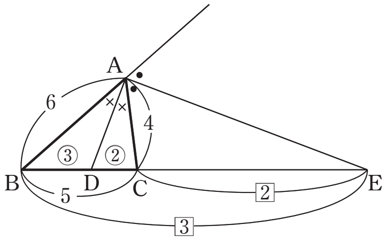
BE：EC＝AB：AC＝3：2

　　よって　CE＝x とおくと

　　$(5+x):x=3:2$　　$3x=2(5+x)$

　　$x=10$　　つまり　CE＝10

したがって，DE＝DC＋CE＝2＋10＝**12**



特に内角の二等分線の性質は最重要項目の１つである．

3　内心の性質により，$\angle IBA=\angle IBC=x$，$\angle ICA=\angle ICB=y$ とする．

△ABC の内角の和より

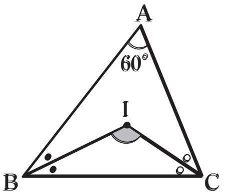
　　$60^\circ+2x+2y=180^\circ$

よって　$x+y=60^\circ$

△IBC の内角の和より

　　$\angle BIC+x+y=180^\circ$

したがって　$\angle$**BIC＝120°**



（内心）＝（内角の二等分線の交点）は忘れてはいけない知識である．今回は内接円を図示する必要はないが，図示する必要がある，または予め図示してある場合においても必要に応じて角の二等分線の知識を使えるように．また，角の二等分線と内心を強く結びつけておくこと．

4　内接円と辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ P，Q，R とすると

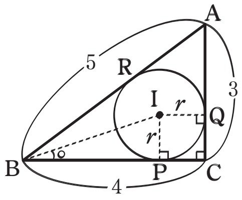
IP＝IQ＝r である．よって四角形 IQCP は正方形となり

CP＝CQ＝r である．

接線の長さは等しいので　BR＝BP＝$4-r$，AR＝AQ＝$3-r$

　　AB＝AR＋BR より　$(3-r)+(4-r)=5$

　　よって　$\boldsymbol{r=1}$　　このとき　BP＝3



また △IBP で三平方の定理より

$\mathrm{BI}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

したがって

$$\cos\angle\mathrm{IBC}=\cos\angle\mathrm{IBP}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BI}}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

> 三角比の知識を使うことで，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ により r を求めることも可能であるが，「直角三角形」の場合においてはここで示した解法が望ましい（誘導がある場合は除く）．また，内接円を図示することで，「半径と辺（接線）が垂直 → 直角三角形における cos の定義」を使うことができる．もちろん，内心が内角の二等分線の交点であることも決して忘れてはならない．

5 (1)　チェバの定理を用いると

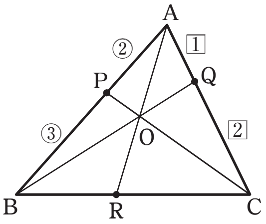
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

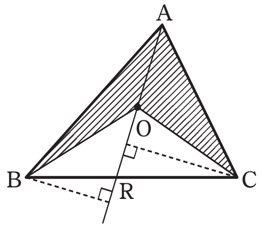
つまり　$\frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{2}{1}=1$

よって　$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RC}}=\frac{3}{4}$　より

BR：RC＝3：4

したがって　△AOB：△AOC＝BR：RC＝**3：4**





(2)　メネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=1$$

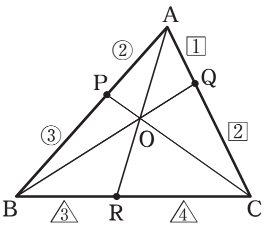
つまり　$\frac{7}{3}\cdot\frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{1}{2}=1$

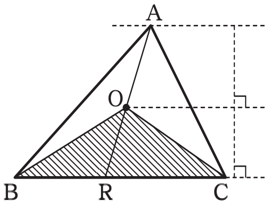
よって　$\frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{OA}}=\frac{6}{7}$　より

AO：OR＝7：6

したがって

△ABC：△OBC＝AR：OR＝**13：6**





> チェバの定理・メネラウスの定理を使える場面は決して多くはないが，三角形の割線が１点で交わる場合には注意しておきたい．また今回の問題で扱った「線分の比 → 面積比」の流れは今後も出てくるので，線分の比が２つの三角形（底辺が等しい）の「高さの比」に等しいことを図を参考に確認しておくこと．

6　△CPQ は CP＝CQ の直角二等辺三角形である．

よって，∠CPQ＝∠CQP＝45°

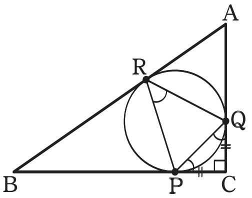
したがって接弦定理により

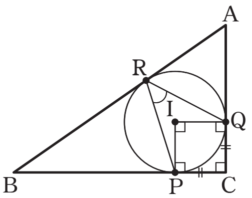
∠PRQ＝∠CPQ＝**45°**

【別解】　内接円の中心を I とすると，四角形 IPCQ は正方形であることより　∠PIQ＝90°

したがって

$$\angle\mathrm{PRQ}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{PIQ}=\mathbf{45°}$$





> 補助線の引き方で解法が異なるが，いずれの解法も「接線の長さが等しい」ことを利用していることに注意．特に【別解】については，「円周角は中心角がわかればよい」に基づき中心を設定したものである．闇雲に設定したのではなく，中心を設定することで「内接円の半径と接線が垂直」であることを用いることができる．内接円の半径を求める問題は既出．

7 (1)　(△PAB∽△PCD　より　PA：PC＝PB：PD　よって)

PA・PD＝PB・PC　　つまり　3・5＝x・4　より　$\boldsymbol{x=\frac{15}{4}}$

(2)　(△PAB∽△PCD　より　PA：PC＝PB：PD　よって)

PA・PD＝PB・PC　つまり　4・9＝x・2x　より　$\boldsymbol{x=3\sqrt{2}}$

(3)　(△ABT∽△TBP　より　BT：BA＝BP：BT　よって)

BT^2＝BP・BA　つまり　BT^2＝4・8＝32　より　BT＝$4\sqrt{2}$

(△ACT∽△TCQ　より　CT：CA＝CQ：CT　よって)

CT^2＝CQ・CA　つまり　CT^2＝2・8＝16　より　CT＝4

したがって　x＝BT＋CT＝$\boldsymbol{4\sqrt{2}+4}$

「方べきの定理」は相似な三角形により導かれる．よってその「結果」であるから，方べきの定理が使えるときは相似比の式をわざわざ立式する必要がないのである．では，どのようなときに立式するか？　それは方べきの定理が使えないとき，である．(1)，(2)ともに「AB：CD」，(3)は「AT：TP」を使う，もしくは求めるときである．

8 ①：∠B＋∠D＝190° より対角の和が 180° にならず，円に内接しない．

②：∠BDC＝65° より BC に関して A と D が同じ側にあり，∠BAC＝∠BDC より円に内接する．

③：∠A＝80° より対角の外角に等しいので，円に内接する．

以上より　**②と③**

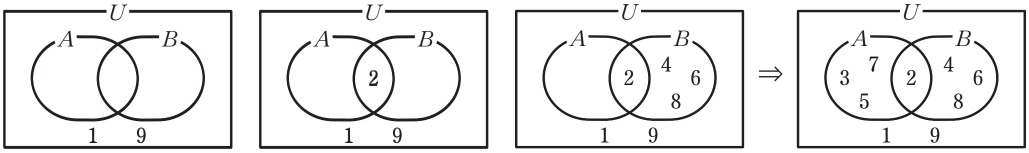
円に内接する四角形を発見する練習である．四角形に内接するとわかったことが次の問題につながることが多い．
例えば②では ∠BDC＝65° より ∠ADC＝90° である．つまり △ACD は AC を直径とする円に内接する．さらにその円周上に点 B が存在する．

第10講　集合・場合の数(1)

【CHECK & UP】

1 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

$=\{1,\ 9\}$　→　$A\cap B=\{2\}$　→ $\overline{A}\cap B=\{4,\ 6,\ 8\}$



(1)　$n(A\cup B)=\mathbf{7}$

(2)　$n(B)=\mathbf{4}$

(3)　$n(A)=\mathbf{4}$

> 集合が2つ以上絡むとき，その共通部分（∩）や和集合（∪）などに注目しながらその関係をベン図に表すことは，集合のみならず複数の「条件」を扱う際にも有効である．今回は具体的な要素であるが，要素の個数や条件を満たす個数についても同様に扱えるように練習しよう．

2 出目を（1回目の出目，2回目の出目）と表す．

(1)　和が4になるのは(1，3)，(2，2)，(3，1)の3通り

　和が5になるのは(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)の4通り

よって，3＋4＝**7（通り）**

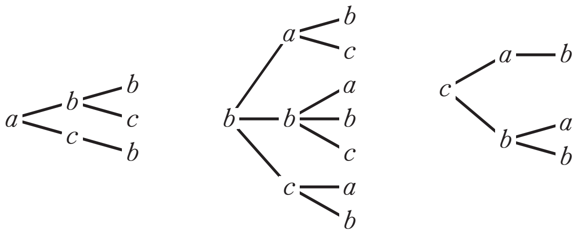
(2)　奇数の目は1，3，5の3通り．よって題意を満たすのは1回目，2回目ともにこの3通りのいずれかが出るとき．1回目の3通りに対し，1回目に関係なく2回目も3通り．

よって　3×3＝**9（通り）**

> 和が4になることと，和が5になることは決して同時に起こることはない．よってこの2つの事象は排反であり，それぞれを求めてから和の法則で答えを導いた．排反については後の講で詳しく学ぶが，場合の数を扱うときそれを排反に分けて考える場面に今後も数多く出会うであろう．

> (1)の「和」は1回目と2回目の目を関連づけるものであった．(2)の「積」が奇数，については1回目，2回目の目がともに「奇数」であるが，1回目と2回目の目は互いに影響を及ぼさない．したがって積の法則で求めた．

3



よって **13通り**．

> 樹形図の利用である．後の「順列」，「組合せ」を習ったあとは計算で求める方法もあるが，まずは書き上げる方法を身につける．ここで，先頭が a のものと先頭が c のものの場合がいずれも3通りで同じであるが，この理由はわかるだろうか．それは問題の文字の個数が a と c で同じであり，他に a と c に差をつけるような条件がないためである．同様，先頭が b のときの2番目は a と c の場合がともに2通りであることに注目しよう．

第11講　場合の数(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　5つの異なる文字を1列に並べる方法は

$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=$ **120（通り）**

このうち異なる3文字を取って1列に並べる方法は

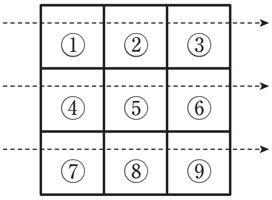
${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=$ **60（通り）**

ここでは「階乗」と「${}_nP_r$」の計算方法について確認した．5文字を並べる際に，最初から1文字ずつ決めるつもりで5通り，4通り，…，1通りと書いても結果は5・4・3・2・1であるが，特に「制約」がない限り次は1つ減ることは明確であるから，1つ1つ考えるのは無駄である．つまり制約がなければ，解く途中過程においてはとりあえず「5! 通り」としておいてよい．そしてすべての条件を扱ったときに改めて計算すればよいのである．${}_5P_3$ についても同様．これに限らず常に「制約」を意識しながら解く必要がある．

(2)　右図①～⑨に1～9の数字を1つずつ書き入れる方法で，

$9!=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$=$ **362880（通り）**



「1列に」というのは，「直線」という意味を必ずしも含んではいない．ある規則に基づいていて，同じ場所に戻ってこなければ，その形状が例え「曲線」であろうが，場所が離れようが関係なく順列が使える．つまり，あるものとあるものを「対応づける」のが順列である．この場合は「場所」と「数字」を1：1で対応づけている．「役員名」と「人」の対応など順列の応用は幅広い．

2 (1)　千，百，十，一の位がそれぞれ1～5の5通り．

したがって　4桁の数の総数は

$5\cdot5\cdot5\cdot5=5^4=$ **625（個）**

(1)　同じものを使ってもよい，いわゆる「重複順列」の問題である．他に制約がなければ常に個数が「リセット」されるため，同じ数字の掛け算，すなわち累乗となる．

(2)　4桁の数字をつくるのに使える数字は多くて4種類である．

よって3個以下の数字を用いた整数は，(1)の総数から4個の数字，つまりすべて異なる数字の場合を除いたものである．

すべて異なる場合は，異なる4個の数字を選んで並べる順列の総数で，

${}_5P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$（個）である．

したがって求める場合の数は　$625-120=$ **505（個）**

(2)は題意を満たさない場合を除く練習である．3個以下「でない」，すなわち「4個以上」の場合を除けばよい．ただし，多くても4つしか使えないので，4つの数字を使う場合を除けばよい．それはすべて異なるものを選んで並べる順列である．

3　a と b を1組とすると，その左右の決め方が　2! 通り

その1組を固定し，他の4文字を円形に並べる方法が　4! 通り

よって a と b が隣り合わせになる場合の総数は　$2!\times4!=$ **48（通り）**

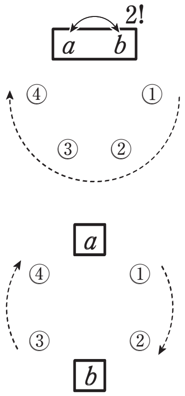
また，a と b が向かい合わせになる場合，a を固定すると

b の場所はその向かい側に固定される．

残りの4文字を並べる方法が　4! 通り

よって a と b が向かい合わせになる場合の総数は　$4!=$ **24（通り）**

1本の糸を通して輪を作るとき，裏返すと円順列として同じものが1組ずつ存在する．



6個のものの円順列の総数は　5! 通り.

したがって輪の総数は　$\dfrac{5!}{2}=\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2}$

$=\mathbf{60}$ **（通り）**

a, b の場所を「固定」すれば回して同じになるものが出てくるはずがない. ①〜④に c, d, e, f を対応させるのは通常の「順列」である.
　向かい側も a と b の場所を固定するものであるが, a の場所を決めるだけで b も決まってしまい, 計算には現れないのが特徴.

4　YOKOHAMA にはO, Aが2個ずつ, Y, K, H, Mが1個ずつ含まれている.

これらの文字をすべて並べる総数は　$\dfrac{8!}{2!2!}=\mathbf{10080}$ **（通り）**

Y, K, H, Mをすべて○と置き換えてからすべて並べ,

○を順にY, K, H, Mとすれば題意を満たす.

O, Aが2個ずつ, ○が4個の順列の総数は

$\dfrac{8!}{4!2!2!}=\mathbf{420}$ **（通り）**

これが求める総数である.

同じものを含む順列をここでは階乗を使って計算する. つまり, 一度すべてを区別し, そして同じものの「重複度合いで割る」ことにより, 同じものをなくす, という流れである.
　この考え方は,「並び順が決まっている」ものについても応用することができる.

第12講　場合の数(3)

【CHECK & UP】

1 (1) $_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{35}$ **(通り)**

(2) ある特定の1人を選んだあと，残り6人から3人選べばよい．

よって　$_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{20}$ **(通り)**

(3) 男子4人から2人選ぶ方法が　$_4C_2$ 通り

女子3人から2人選ぶ方法が　$_3C_2$ 通り

よって求める場合の数は

$_4C_2\times{}_3C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times3=\mathbf{18}$ **(通り)**

> 選ぶ「だけ」であるため，選ぶ順番や対応関係は考慮しない．それが組合せである．
> (2)では，特定の人が誰であったとしても，それを選ぶのは数学の計算ではない．例えばそれを間違って $_7C_1$ とすると，7人のうち「誰が選ばれてもよい」ということになる．決定していること，自分で決めたことは場合の数の計算に入らない．
> (3)では，題意を満たすために「男子」という集団と「女子」という集団からそれぞれ選んでいる．選び方はお互いに干渉しないので積の法則で求められる．

2 AからBに至る最短経路の総数は，右（→）4つ，上（↑）5つの順列の総数である．それは9回の移動のうち，右に行く4回が何回目かを選ぶ場合の数と同じである．

したがって　$\dfrac{9!}{4!5!}={}_9C_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$（通り）である．

また，そのうちCを通るものは，

AからCが　$\dfrac{4!}{2!2!}={}_4C_2=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$（通り）

CからBが　$\dfrac{5!}{2!3!}={}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$（通り）

であるから，その場合の数は　$6\times10=60$（通り）

ゆえに，Cを通らないものは　$126-60=\mathbf{66}$ **(通り)**

> 「最短経路」の問題は，同じものを含む順列の問題として有名であるが，右か上の2種類しか選択肢がないため，全体のうち右に行くときを決めれば自ずといつ上に行かなければならないかが決まる．よって同じ物を含む順列で特に種類が2種類に限られる場合はこの「組合せ」が代用されることも少なくない．また，「通らない」場合は「通る」場合を除いた．

3 みかんをもらう人を7人から重複を許して選ぶ方法で，その総数は3個の○と6本の｜を並べる順列の総数に等しい．

したがってその求める総数は

$\dfrac{9!}{3!6!}={}_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{84}$ **(通り)**

> (みかんを人に配る)＝(人がみかんに選ばれる)と考えることができるだろうか．つまり，今回はみかんには一切区別がないため，「どのみかんを」という議論は一切ない．それに対し，人は明確に区別されており，さらに「同じ人が何回選ばれてもよい」という状況である．この「重複組合せ」は「仕切り（｜）」を用意することで同じものを含む順列として扱うことができる．

4 $(1-2x)^5$ の展開式における x^3 の項は　$_5C_3\cdot1^2\cdot(-2x)^3=-80x^3$

よってその係数は　$\mathbf{-80}$

第13講　確率(1)

【CHECK & UP】

1　5個の球から2個の球を取り出す方法が ${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=5\cdot2$（通り）

3個の白球から2個取り出す方法が ${}_3C_2=3$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{5\cdot2}=\mathbf{\dfrac{3}{10}}$

> 確率の基本問題で，当然の結果と思う人もいるかもしれない．しかし，赤球2個，白球3個から2個取り出す場合の数は，赤赤，赤白，白白の「3通り」である．では今回の確率の分母における $5\cdot2=10$（通り）とは何であろうか？　それは確率の世界では「同じものもすべて区別して考える」ことを原則とするからである．さもないと，「根元事象が同様に確からしくない」状態を招く．
> 赤2個を R_1，R_2，白3個を W_1，W_2，W_3 と区別すると，
> 「赤赤」…$(R_1,\ R_2)$ の1通り
> 「赤白」…$(R_1,\ W_1)$，$(R_1,\ W_2)$，$(R_1,\ W_3)$，$(R_2,\ W_1)$，$(R_2,\ W_2)$，$(R_2,\ W_3)$ の6通り
> 「白白」…$(W_1,\ W_2)$，$(W_1,\ W_3)$，$(W_2,\ W_3)$ の3通り
> よって，「赤赤」，「赤白」，「白白」の3つの事象は，同様に確からしくないため，確率の根元事象として扱うことはできない．

2　(1)　1枚引いたとき，スペードが出る確率が $\dfrac{13}{52}$，11が出る確率が $\dfrac{4}{52}$

スペードの11である確率が $\dfrac{1}{52}$

よって求める確率は　$\dfrac{13}{52}+\dfrac{4}{52}-\dfrac{1}{52}=\dfrac{16}{52}=\mathbf{\dfrac{4}{13}}$

> 確率の加法定理
> $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
> の確認である．

(2)　1枚引いたとき，スペードが出る確率が $\dfrac{13}{52}$，ハートが出る確率が $\dfrac{13}{52}$

スペードとハートが同時に出ることはない．

よって求める確率は　$\dfrac{13}{52}+\dfrac{13}{52}=\dfrac{26}{52}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

> A と B が「排反事象」であるとき
> $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

【別解】　1枚引いたとき，「スペードが出る」，「ハートが出る」，「ダイヤが出る」，「クラブが出る」ことは同様に確からしい．このうち，「スペードが出る」または「ハートが出る」確率は　$\dfrac{2}{4}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(3)　1枚引いたとき，ダイヤが出る確率は $\dfrac{13}{52}=\dfrac{1}{4}$

したがって，ダイヤが出ない確率は　$1-\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

> 「余事象」を求める方が楽，または余事象に当たるものが既知であるならば，積極的に用いて計算を楽にしよう．

3　Aが命中させる確率は $\dfrac{4}{5}$，はずす確率は $\dfrac{1}{5}$

Bが命中させる確率は $\dfrac{3}{5}$，はずす確率は $\dfrac{2}{5}$　である．

したがって，2人ともはずす確率は　$\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{25}$

ゆえに，2人のうち少なくとも一方が命中させる確率は　$1-\dfrac{2}{25}=\mathbf{\dfrac{23}{25}}$

> Aが矢を射る行為とBが矢を射る行為は，数学的に全く「独立」した試行である．よってそれぞれの確率を求め，「乗法定理」で確率を求めることができる．
> また，この問題に関しても積極的に「余事象」を用いた．

第14講　確率(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　5回中，1の目が出る2回を選ぶ方法が ${}_5C_2$ 通り．

残りの3回は1以外の目が出ている．

この ${}_5C_2$ 通りのいずれが起こる確率も

$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$ である．

したがって求める確率は

$${}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{5^3}{6^5}=\frac{5^4}{3\cdot6^4}=\mathbf{\frac{625}{3888}}$$

反復試行において，ある事象が起こる「回数」が与えられているとき，その事象がどの回で起こっても確率は変わらない．つまり，「どこの回で起こるのか」の決め方の分（今回は ${}_5C_2$）だけ同じ確率が発生する，と考えるのである．よって

（事象が起こる場合の数）×（その確率）

となるのである．

(2)　5回中，1の目が1回，2の目が2回，

その他が2回出る場合の数は

1，2，2，×，×の順列で　$\frac{5!}{2!2!}$ 通り．

したがって求める確率は

$$\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^2=30\cdot\frac{4^2}{6^5}=\frac{5\cdot4^2}{6^4}=\mathbf{\frac{5}{81}}$$

反復試行において，扱う事象が3つ（以上）になると，その場合の数の決め方として ${}_nC_r$ を羅列させるより「同じものを含む順列」として扱う方が「立式・計算が速い」場合がある．もちろんどちらも結果は同じになる．反復試行は必ず ${}_nC_r$ を用いる，という幻想は抱かないようにしたい．

(3)　5回目の試行で3度目の偶数が出るのは，

1～4回目の試行で2回のみ偶数が出て，5回目で偶数が出る場合である．

よって求める確率は

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=6\cdot\frac{1}{32}=\mathbf{\frac{3}{16}}$$

最後の回の事象が決定している．よって場合の数を考える際，1～4回目のみ決めていることがわかる．

2 (1)　1回目に白球を取り出す確率は　$\frac{4}{7}$

その後，2回目に白球を取り出す確率は　$\frac{3}{6}$

したがって求める確率は　$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\mathbf{\frac{2}{7}}$

「条件付き確率」の基本問題である．球をもとに戻さない場合は，前に取り出した球によって次の事象が起こる確率が変化する．それぞれで確率を求めてそれらの積により求めることができることは，それが「順列」の考え方で求められることからもわかる．

【別解】　球をすべて区別すると，白球4個，黒球3個が入った袋から

同時に2球取り出して並べる方法が　${}_7P_2$ 通り

白球4個から2個取り出して並べる方法が　${}_4P_2$ 通り

したがって求める確率は　$\frac{{}_4P_2}{{}_7P_2}=\frac{4\cdot3}{7\cdot6}=\mathbf{\frac{2}{7}}$

(2)　コイン3枚を同時に投げたとき，少なくとも1枚が裏である事象を A，3枚とも裏である事象を B とすると，求める確率は　$P_A(B)$ である．

コインを3枚同時に投げたとき，起こり得るすべての事象は $2^3=8$（通り）

事象 A は3枚すべて表であることの余事象であることより7通り．

よって　$P(A)=\frac{7}{8}$

$A\cap B$ は「少なくとも１枚が裏　かつ　３枚とも裏」，

すなわち「３枚とも裏」であることより，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{8}$

したがって，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{8}\div\dfrac{7}{8}=\mathbf{\dfrac{1}{7}}$

「少なくとも１枚は裏」ということが「前提」であることに注意．３枚のコインの表裏は８通りあるが，この前提により「７通り」を全事象とするイメージである．このうち，すべて裏であるのは１通り．したがって求める確率は $\dfrac{1}{7}$ なのである．

3 与えられた 10 枚のカードから

１を取り出す確率は $\dfrac{1}{10}$，２を取り出す確率は $\dfrac{2}{10}$，

３を取り出す確率は $\dfrac{3}{10}$，４を取り出す確率は $\dfrac{4}{10}$

である．したがって求めるカードの番号の期待値は

$$1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{4}{10}=\frac{1}{10}(1+4+9+16)=\mathbf{3}$$

「期待値」の指導のタイミングは，教育課程によって，または学校によって異なる．確率の学習が一通り終了しても未習の場合は，「分散」などとともに後日学習する事項となる．また，「数列」とも密接な関係がある分野であるため，この講座においては「確率の平均」として軽めの扱いとしておく．

第 15 講　命題と証明

【CHECK & UP】

1

(1)　**a は有理数である**

(2)　**$a \leqq 0$　かつ　$b \neq 0$**

(3)　**a，b の少なくとも一方は 0 以下**

「否定」は「～でない」という状態．それに該当する用語があればそれを用いるのがよい．「正でない」＝「負」，はよくある間違い．0 の存在を忘れてはならない．また，集合における「ド・モルガンの法則」により，否定をつくる際は「ともに（かつ）」と「少なくともどれか 1 つ（または）」の入れ替えに注意すること．ちなみに，「$a \geqq 0$」は「$a>0$　または $a=0$」である．「または」ではあるが，a が正であることと a が 0 であることは「排反事象（同時に起こらない）」である．

2

逆：$x^2=4 \Longrightarrow x=2$　　**偽（反例：$x=-2$）**

裏：$x \neq 2 \Longrightarrow x^2 \neq 4$　　**偽（反例：$x=-2$）**

対偶：$x^2 \neq 4 \Longrightarrow x \neq 2$　**真**

（命題「$x=2 \Longrightarrow x^2=4$」が明らかに真より，その対偶も真）

ある命題が「偽」であることを言うには，「反例」を 1 つ挙げればよい．ところが「真」であることを言うには，明らかに真である場合を除き「反例が 1 つも存在しない」ことを「証明」しなければいけない．よってその「対偶」が真であることを示すのが効果的である場合が少なくない．

3

$ab=0 \Longrightarrow a=b=0$　は偽（反例：$a=0$，$b=1$）

よって，$ab=0$ は十分条件ではない．

$a=b=0 \Longrightarrow ab=0$　は明らかに真

よって，$ab=0$ は必要条件である．

したがって，$ab=0$ は $a=b=0$ であるための**必要条件**である．

ある条件にスポットを当て，その条件が他の条件が成り立つための何条件であるかを判断する問題である．

自身のもつ条件を 1 つの例外（反例）もなくもう一方が受け入れられれば十分条件であり，もう一方がもつ条件を 1 つの例外（反例）なく自分が受け入れられれば必要条件である．

上で述べたように，「真」であることを言うのは難しい．よって相手が受け入れられない条件を自分がもっている，つまり反例が存在するのでは？　と疑うことから始まることが多い．

4

(1)　n が整数のとき，

命題「n^2 は偶数 $\Longrightarrow$ n は偶数」の対偶は

「n は奇数 $\Longrightarrow$ n^2 は奇数」である．

n が奇数のとき，$n=2k+1$（k：整数）とおける．

このとき $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$

$2k^2+2k$ は整数より n^2 は奇数である．

したがって対偶が真より，もとの命題も真である．

(2)　n が整数のとき，n が奇数であると仮定する．

$n=2k+1$（k：整数）とおくと，

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$

$2k^2+2k$ は整数より n^2 は奇数である．

よって n^2 が偶数であることに反し，矛盾する．

したがって，n は偶数である．

ある命題を示すとき，結論を否定するならば仮定も否定される，いわゆる「対偶」が真であることを示すのは有効な手段の 1 つである．それに対し，背理法は結論を否定することで「何かに矛盾を起こす」，よって結論を否定したのは間違い，つまり結論は正しいとする論法である．その何かが何なのかは問題によってさまざまである．もとの命題が $p \Longrightarrow q$ の形であれば，矛盾を起こすのは p に対してであろうが，それは「対偶」が真であることを示すことと変わらない．

結論が「～でない」，「○または△」という形の場合に対偶や背理法が用いられることが多い．「無理数」も「有理数でない」と考えれば同様．

第 16 講　式と証明(1)

【CHECK & UP】

1

$$\begin{array}{r} 5x^2 \quad -2 \\ x^2-1 \,\big)\, 5x^4 \quad -7x^2+x \\ 5x^4 \quad -5x^2 \qquad \\ \hline -2x^2+x \\ -2x^2 \quad +2 \\ \hline x-2 \end{array}$$

項のないところは「空白」を補っておくとよい.

商　$5x^2-2$　　余り　$x-2$

2 (1)　整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが -6 であることより

$P(x)=(x+1)\cdot Q_1(x)-6$　とおける.

よって　$P(-1)=-6$　……①

整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが -4 であることより

$P(x)=(x-2)\cdot Q_2(x)-4$　とおける.

よって　$P(2)=-4$　……②

商は不明であるため，自分でおく必要がある．複数設定する必要がある場合は $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ などと序数をつけるとよい.

整式 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割った余りを $ax+b$ とおくと，

$P(x)=(x+1)(x-2)\cdot Q(x)+ax+b$　と表せる.

①より　$-a+b=-6$　　②より　$2a+b=-4$

よって　$a=\dfrac{2}{3}$，$b=-\dfrac{16}{3}$　　したがって求める余りは　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}x-\dfrac{16}{3}}$

整式を 2 次式で割った余りは 1 次式以下である．$a=0$ のときは定数.

(2)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & 5 & 12 & -1 \\ & -1 & 7 & -12 & \\ \hline 1 & -7 & 12 & 0 & \end{array}$$

$x^3-6x^2+5x+12=0$ の有理数解の候補は

$x=\pm1$，±2，±3，±4，±6，±12　である.

今回は $x=-1$ で組立除法を行ったが，$x=3$，4 でも余りは 0 となる.

よって　$x^3-6x^2+5x+12=(x+1)(x^2-7x+12)=\boldsymbol{(x+1)(x-3)(x-4)}$

3 (1)　$\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2-x-2}$

$=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{2(x-2)-3(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\dfrac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

$=\boldsymbol{-\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}}$

分母の共通因数を見つけるのは，数字のみの分数における最小公倍数を見つけるのに似ている.

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{\underline{2}\cdot2}-\frac{1}{\underline{2}\cdot3}=\frac{3-2}{\underline{2}\cdot2\cdot3}=\frac{1}{12}$$

においては，4 と 6 の最小公倍数が 2 であることを利用している.

(2)　$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1\times(x+1)}{\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\times(x+1)}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x+1}{(x+1)-1}}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{1\times x}{\left(1-\dfrac{x+1}{x}\right)\times x}=\dfrac{x}{x-(x+1)}=\dfrac{x}{-1}=\boldsymbol{-x}$

繁分数の計算においては，分母にあたる部分を部分的に計算し，逆数にして掛け算に直す方法もある．ここでは分母と分子に同じ因数を掛けても同値であることを利用した.

4 (1) （係数比較法）

$a(x-1)^2+b(x-1)+c=ax^2-2ax+a+bx-b+c$

$=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$

これを x^2-x+1 と係数比較して，$a=1$，$-2a+b=-1$，$a-b+c=1$

したがって，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=1}$

（数値代入法）

両辺に $x=1$ を代入して　$1=c$

$x=0$ を代入して　$1=a-b+c$

$x=2$ を代入して　$3=a+b+c$

以上より，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=1}$

このとき x の 2 次式が 3 つの値で成立するので，与えられた等式は恒等式となる．

恒等式になるためには，x にある特定の値を入れたときに成立することが「必要」である．ただし，n 次の等式が n 個の値で成立するだけではその値は「方程式の解」にすぎない．よって $n+1$ 個以上の値で成立すれば「十分」である．左の例では 2 次式に対して 3 個の値で成立するので恒等式となるが，もし 3 次式であったならば，恒等式になるかを確かめる必要がある．

(2) 与式を k について整理すると

$(2x-3y+1)k+(3x+2y-5)=0$

これがすべての実数 k の値で成立するのは，

$2x-3y+1=0$　かつ　$3x+2y-5=0$　のときである．

よって　$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{y=1}$

「x，y に関する 1 次式」を，ある文字に関する恒等式にするという作業は今後も出てくる．その代表例として，文字（変数）の値に関わらず「直線」が必ず通る点（定点）が挙げられる．つまり今回は，与えられた直線が k の値に関わらず必ず定点 $(1,\ 1)$ を通ることを表している．

5 (1) $a+b+c=0$ より　$c=-a-b$

このとき　$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-a-b)^3$

$=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=-3a^2b-3ab^2$

$-3(a+b)(b+c)(c+a)=-3(a+b)(b-a-b)(-a-b+a)$

$=-3(a+b)(-a)(-b)=-3a^2b-3ab^2$

したがって　$a^3+b^3+c^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$

【別解】　$a+b+c=0$ より

$a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$

このとき　(左辺)$-$(右辺)

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

したがって　(左辺)$=$(右辺) である．

条件式により文字の個数を減らすのが基本である．等式の証明は，左辺と右辺が「必ず等しくなる」とわかっているので，計算さえ乗り切ればさほど難易度は高くないものが多い．しかし，今回の問題のように「対称形」であるものは工夫することによりその計算量を減らすことができるものもある．

(2) $abc=1$ より $a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$　　よって　$ab=\dfrac{1}{c}$，$bc=\dfrac{1}{a}$ を左辺に代入すると

$$(\text{左辺})=\frac{a}{\frac{1}{c}+a+1}+\frac{\frac{1}{ac}}{\frac{1}{a}+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{ac}{1+ac+c}+\frac{1}{c+abc+ac}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{ca}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}+\frac{c}{ca+c+1}=\frac{ca+c+1}{ca+c+1}=1$$

よって　(左辺)＝(右辺)である．

【別解】 $\dfrac{a}{ab+a+1}=\dfrac{ac}{abc+ac+c}=\dfrac{ac}{ca+c+1}$

$\dfrac{b}{bc+b+1}=\dfrac{ab}{abc+ab+a}=\dfrac{ab}{ab+a+1}$

$=\dfrac{abc}{abc+ac+c}=\dfrac{1}{ca+c+1}$

よって　(左辺)$=\dfrac{ca}{ca+c+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=\dfrac{ca+c+1}{ca+c+1}=1$

したがって　(左辺)＝(右辺) である．

> (2)の別解においては「分母と分子に同じものを掛けても元と等しい」ことを利用し，abc の形をつくりそれを1とした．分母は $ab+a+1$，$bc+b+1$，$ca+c+1$ をループするのが特徴である．
> また，今回は異なるが「1を abc に置き換える」ということもある．1は文字の係数としては目に見えないので注意．

6 (1)　$(x+y)^2-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geqq 0$

よって　$(x+y)^2\geqq 4xy$

等号成立は $x=y$ のときである．

> (1)　不等式の証明の基本は「差をとること」である．また，「等号成立」のための条件は，単に「証明せよ」であれば必ずしも必要ではない．それは，「□≧0」を示すとは「□>0 または □＝0」を示すことであり，□＝0 になる必要がないからである．しかしながら証明問題，という枠を越えれば，不等式において等号の成立するときが問題解決の重要な要素を握っている問題も多いため，等号が成立するときの条件を出す練習を欠かすことはできない．

(2)　$10x^2+y^2-6xy+4x+4$

$=10x^2-2(3y-2)x+y^2+4$

$=10\left(x-\dfrac{3y-2}{10}\right)^2-\dfrac{1}{10}(3y-2)^2+y^2+4$

$=10\left(x-\dfrac{3y-2}{10}\right)^2+\dfrac{1}{10}y^2+\dfrac{12}{10}y+\dfrac{36}{10}$

$=10\left(x-\dfrac{3y-2}{10}\right)^2+\dfrac{1}{10}(y+6)^2\geqq 0$

よって　$10x^2+y^2-6xy+4x+4\geqq 0$

等号成立は　$x=\dfrac{3y-2}{10}$ かつ $y=-6$　つまり　$x=-2$，$y=-6$ のときである．

> (2)　左の例では2次式であることを利用して，「x についての降べきの順」→「x について平方完成」→「y について平方完成」→「≧0」という流れ．もちろん最初に「y について降べきの順」を選択する方法もあり，今回の問題は実はその方が若干計算が楽になる．
> 　今回は完全平方式の形となったが，もし平方完成して正の数が余ってしまう場合は，等号（＝0）が成立しないということである．

(3)　$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$

よって，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　　等号成立は $a=b$ のときである．

> 有名な「相加平均≧相乗平均」の証明である．$\sqrt{\ }$ をはずすために，$(左辺)^2-(右辺)^2$ を計算する方法もあるが，今回はそれを行わずに証明した．2乗する場合は「両辺が正」であることをどこかで断る必要がある．もちろん左の解法も $a>0$ だからこその $a=(\sqrt{a})^2$ であるが．

7 $\dfrac{1+ai}{3+i}=\dfrac{(1+ai)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3-i+3ai-ai^2}{9-i^2}=\dfrac{a+3+(3a-1)i}{10}$

$=\dfrac{a+3}{10}+\dfrac{3a-1}{10}i$　……①

a は実数より，$\dfrac{a+3}{10}$，$\dfrac{3a-1}{10}$ も実数である．

> a，b が実数のときに，複素数 $a+bi$ を見ると必ず虚数単位「i」が含まれるように思えるが，$b=0$ のときは実数 a のみとなる．$b\neq0$ のときは「i」が残り，そのとき複素数は「虚数」となる．複素数と虚数を混同しないように．

(1)　①が実数となるのは　$\dfrac{3a-1}{10}=0$　つまり　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3}}$ のときである．

(2)　①が純虚数となるのは　$\dfrac{a+3}{10}=0$　かつ　$\dfrac{3a-1}{10}\neq0$　である．

$\dfrac{a+3}{10}=0$ より $a=-3$　これは $\dfrac{3a-1}{10}\neq0$ を満たす．

よって　$\boldsymbol{a=-3}$

第 17 講　式と証明(2)

【CHECK & UP】

1 $3x^2+3x-6=0$ の 2 解が α，β であることより，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{3}=-1,\ \alpha\beta=\frac{-6}{3}=-2$$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot(-2)=\mathbf{5}$

(2) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4\cdot(-2)=\mathbf{9}$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{5}{-2}=\mathbf{-\dfrac{5}{2}}$

> 解と係数の関係は，2 次方程式の解を扱う問題を解決する手段として最重要項目の 1 つである．方程式を解いて解を出すことなく解を利用できる，また「和」と「積」を強く意識することがこの問題の目的である．それが，ゆくゆくは解と係数の関係の「逆」としての利用につながる．

2 (1) $x^3=1$　より　$x^3-1=0$　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1,\ x^2+x+1=0$　　よって　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

> (1) $x^3=1$ を満たす x，すなわち 1 の立方根のうち虚数のものは「ω（オメガ）」として知っている人も多いであろう．

(2) $x^3-x^2-3x-1=0$　より

$(x+1)(x^2-2x-1)=0$

$x=-1,\ x^2-2x-1=0$

よって　$\boldsymbol{x=-1,\ 1\pm\sqrt{2}}$

1	−1	−3	−1	−1
	−1	2	1	
1	−2	−1	0	

> 3 次以上の式において因数分解をする手段の筆頭は「組立除法」である．確実に使いこなせるように．

(3) $x=0$ は $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$ の解ではない．

よって与えられた方程式を x^2 で割ると，

$$x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$t^2-7t+12=0$

$(t-3)(t-4)=0$　　よって　$t=3,\ 4$

$t=3$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=3$　　$x^2-3x+1=0$　　$\boldsymbol{x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

$t=4$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=4$　　$x^2-4x+1=0$　　$\boldsymbol{x=2\pm\sqrt{3}}$

> (3) 組立除法を試みたとき，候補に挙げられる値ではすべて失敗する，という問題の代表例がこの問題である．
> 降べきの順に並べたとき，係数が左右対称になる式，いわゆる「相反式」に関する方程式である．その対称性を利用した解法をこの問題を通じて学んでおきたい．

第18講　三角関数(1)

【CHECK & UP】

1 弧の長さは　$8\cdot\dfrac{3}{4}\pi=\boldsymbol{6\pi}$

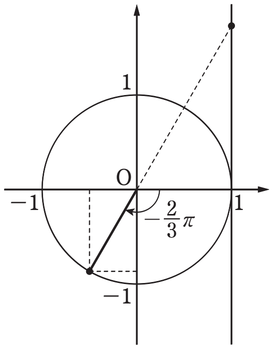
面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 8^2\cdot\dfrac{3}{4}\pi=\boldsymbol{24\pi}$

> 半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さおよび面積の公式については，使用頻度は数学Ⅱではさほど多くない．しかし，ラジアン表記された問題では確実に使えるようにしたい．

2 $\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{1}{2}$

$\tan\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{3}$



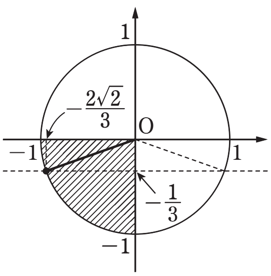
> 有名角に対する三角比の値が練習済みであれば，三角関数も出てくる値は変わらない．180°＝π を基本とするラジアン表記，および角度の符号に対する慣れにより，違和感なく単位円に落とし込むことができるであろう．ただし，象限による三角関数それぞれの「符号」に注意．

3 $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$ より

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}$

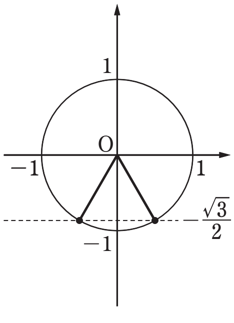
$=\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

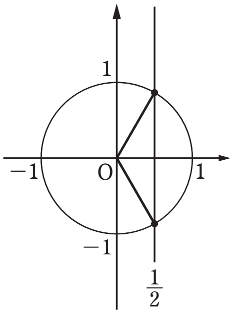
$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-1}{-2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

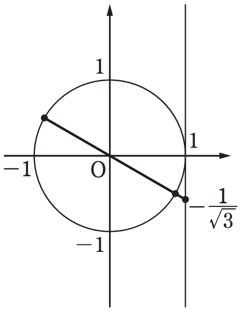


> 「鋭角」や「鈍角」と異なり，「象限」は角度を決定づけるものではない．単位円における「場所」を意識し，それによる三角関数の「符号」を強く意識すること．また，三角関数の値についても三角比よりさらに意識する必要がある．今回であれば $-\dfrac{1}{3}$ という sin の値である．

4 (1)　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$　　(2)　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$　　(3)　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$

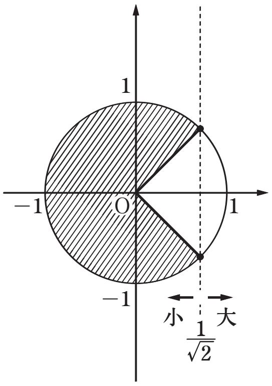


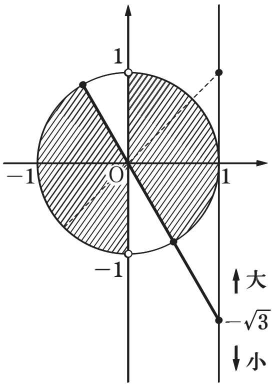




> 「$0\leqq\theta<2\pi$」という範囲において，三角関数の値「1つ」に対し，それに対応する角度が「2つ」出てくる問題である．もちろん考える範囲や与えられる三角関数の値が変われば，出てくる角度の個数も変わる．ときに角度が3個以上になったり1個や0個になったりするので注意．

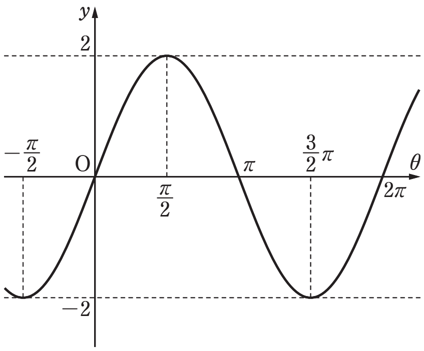
5 (1) $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{4}\pi$　　(2) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{5}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi$





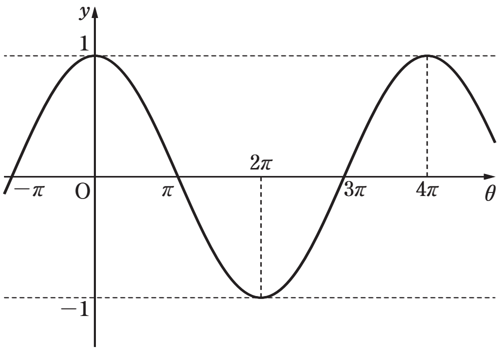
不等式においては方程式と異なり，三角関数の値がある値を境に大きくなる，または小さくなるという「動き」を捉える必要がある．それにより対応する角度がとり得る範囲を定めなければならない．やはり単位円が役に立つであろう．三角関数の値の動きに応じて，同時に 2 つの角度が含まれていくことに注意を払わねばならない. 特に tan は $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$ といった角度が含まれないことに細心の注意を払うこと.

6 (1)



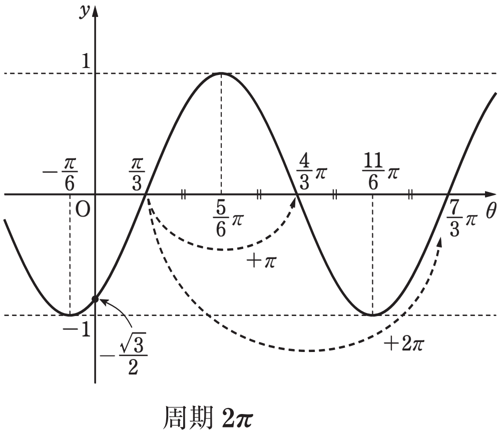
周期 2π

(2)



周期 4π

(3)



周期 2π

まず,「グラフをかく」とき意識すべきは「定義域」である.今回は定義域が指定されていないため自由に範囲を設定できる．ただし三角関数の周期性を考えると，最低でも 1 周期分はかいておきたい．そしてプロットする角度として,「最大」,「最小」,「θ 軸とグラフがぶつかるところ」を押さえておこう.
(1)は sin の値に対し「2 倍」する問題．$y=\sin\theta$ のグラフと比較して「y 軸方向に 2 倍伸びる」.
(2)は角度が「$\frac{\theta}{2}$」．よって θ に入れた角度が「$\times\frac{1}{2}$」されてしまう．よって例えば $\theta=2\pi$ であっても $\frac{\theta}{2}=\pi$ となってしまう．したがって同じ動きをするところに戻ってくるためには θ が「2 倍必要」. つまり「周期」が「2 倍」される.
(3)は角度 θ から $\frac{\pi}{3}$ が引かれているので，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ 平行移動したものとなる．$y=\sin\theta$ でプロットした角度すべてに $\frac{\pi}{3}$ を加えてもよいが，ここは「周期性」を利用したい．この周期性をつかむことで，変域によってグラフを 2 周期分，3 周期分と描く必要があるときに役に立つ．また，切片の値を出すことも今後につながる．$\theta=0$ のときの値は $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　よって $\theta=2\pi$ のときの値も同様である.

第19講　三角関数(2)

【CHECK & UP】

1　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ より　$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{12}{13}$ より　$\sin\beta=\dfrac{5}{13}$

このとき

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{13}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{5}{13}=\boldsymbol{\frac{12-10\sqrt{2}}{39}}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{12}{13}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{13}=\boldsymbol{\frac{24\sqrt{2}+5}{39}}$$

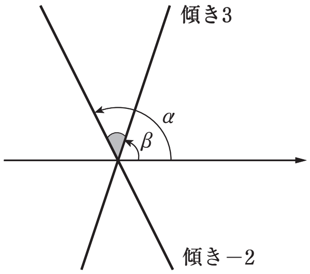
> 「加法定理の公式」の証明には非常に時間がかかるため，原理を理解した後は使うことで「暗記」しなければいけない公式である．
> この問題のように実際に三角関数の値を入れて計算することは今後多くはないが，三角関数の相互関係も含めて練習しておこう．

2　2直線 $y=-2x+1$, $y=3x-1$ が x 軸の正方向となす角をそれぞれ α, β とすると，$\tan\alpha=-2$, $\tan\beta=3$ である．
このとき

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2-3}{1+(-2)\cdot3}=1$$

よって $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに求める鋭角は　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$



> 三角比においても直線の傾きと tan の値については扱った．ここではそれぞれの直線が x 軸となす角が不明な状態で，2直線のなす角を tan の加法定理を用いて導く問題である．
> 　なす「鋭角」となっている．加法定理によって導いた「角度の差」が鋭角かどうかは，図を描いた時点ではわからない場合もある．その場合は θ は鋭角として最後に「のみ」登場することとなる．

3　(1)

$$\begin{aligned}\sin3\alpha&=\sin(2\alpha+\alpha)\\&=\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\&=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos3\alpha&=\cos(2\alpha+\alpha)\\&=\cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha\\&=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha\\&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha\\&=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\&=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\end{aligned}$$

> 3倍角の公式はいずれ暗記する必要があるが，この公式を導くプロセスの中に，加法定理，2倍角，相互関係といった重要公式が入っていることを忘れてはならない．また cos の2倍角は3択であるが，今回はどれを選択すべきか，といった判断の練習にもなる．

4 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ のとき　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\dfrac{7}{16}}=-\dfrac{3}{4}$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{3}{4}}{2}=\frac{7}{8}$$

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{7}{8}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{14}}{4}}$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{4}}{2}=\frac{1}{8}$$

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

> 与えられた角度に対し，値を求めたい関数の角度はその「半分」である．よって「半角の公式」により「角度を倍」にして与えられた三角関数の値を利用できるようにする必要がある．$\dfrac{\alpha}{2}$ だから半角の公式，ではない．
> 半角の公式は cos の 2 倍角の公式から変形して作成するため，まずは確実に
> $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$
> $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$
> を覚えること．この 2 倍角の公式は，2θ を θ で表し直す，つまり「角度を半分にする」公式である．

第 20 講　三角関数(3)

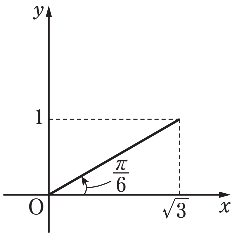
【CHECK & UP】

1 (1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\mathbf{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$

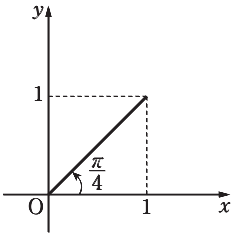


(2) $\sin\theta-\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\mathbf{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$



> 「三角関数の合成」が「加法定理の逆」であることを理解した上で，図のように $a\sin\theta+b\cos\theta$ から $(a,\ b)$ をプロットし，そこから合成後の「角度のずれ」に相当する角を導いて合成することは問題ない．その場合は途中計算は存在せず答えのみとなる．
> 　しかし，加法定理の逆であることを理解していないと，(2)で点 $(1,\ -1)$ をプロットし，$-\frac{\pi}{4}$ を合成後のずれとして考えてしまう．結果としては何も間違っていないが，そのプロセスを詳細に記述すると，$\sin(\alpha-\beta)$ を $\sin\{\alpha+(-\beta)\}$ として導いた頃に逆戻りしているのと同じである．
> 　また，$r\cos(\theta+\alpha)$ の形に合成することも，加法定理の逆であることを理解していれば造作もないが，図から導く方法しか知らないとお手上げである．

2 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=2\sin\alpha\cos\beta$　……①

よって　$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=2\cos\alpha\sin\beta$　……②

よって　$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=2\cos\alpha\cos\beta$　……③

よって　$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=-2\sin\alpha\sin\beta$　……④

よって　$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

$\begin{cases}\alpha+\beta=A\\ \alpha-\beta=B\end{cases}$ より $\begin{cases}\alpha=\dfrac{A+B}{2}\\ \beta=\dfrac{A-B}{2}\end{cases}$

> 積和，和積の公式ともに，直近で利用しなければならない場面はほとんどないであろう．よって暗記する必要も全くない．しかしそれをいつでも自力で導けるようにしておくことが今後につながることは間違いない．

①より　$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

②より　$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

③より　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

④より　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

第 21 講　図形と方程式(1)

【CHECK & UP】

1　P(p)，Q(q)，R(r) とする．

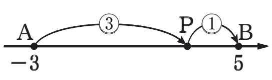
(1)　$p=\dfrac{1\cdot(-3)+3\cdot 5}{3+1}=3$　　よって　$\mathbf{P(3)}$

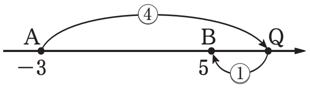
(2)　$q=\dfrac{(-1)\cdot(-3)+4\cdot 5}{4-1}=\dfrac{23}{3}$　　よって　$\mathbf{Q\left(\dfrac{23}{3}\right)}$

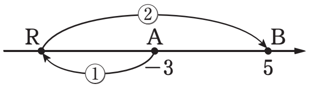
(3)　$r=\dfrac{2\cdot(-3)+(-1)\cdot 5}{-1+2}=-11$

よって　$\mathbf{R(-11)}$

> 内分，外分ともにまずはその点を「図示」できるかがカギとなる．特に「線分 AB を」と「線分 BA を」の区別ができていること．「線分 AB を」は「A から B に向かって」であり，「線分 BA を」は「B から A に向かって」である．
> 　さらに「外分」に関しては，上記の方向を「正の方向」とすると，小さい数字の分だけ「負の方向」に戻るイメージ．よって「4：1 に外分」であれば，「4 行って 1 戻る」，「1：2 に外分」であれば，「1 戻って 2 行く」ということである．公式においては，戻る数字に「−」がつく．

(1)


(2)


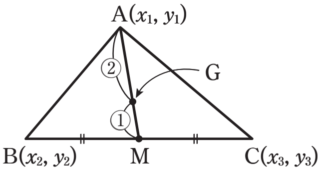
(3)


2　(1)　$\mathbf{M\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)}$

(2)　重心 G は中線 AM を 2：1 に内分する点である．

よって　$\left(\dfrac{1\cdot x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1},\ \dfrac{1\cdot y_1+2\cdot\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}\right)$

したがって　$\mathbf{G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)}$



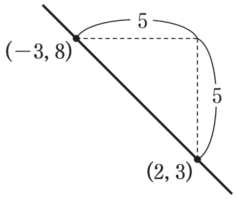
> 中点は「1：1 に内分」する点である．
> 重心についてはこの結果を「公式」としつつも，それを導くのに用いた重心の性質および計算プロセスは忘れてはならない．

3　(1)　傾きは $\dfrac{-5}{5}=-1$

よって求める直線の方程式は

$y=-1(x-2)+3$

つまり　$\mathbf{y=-x+5}$



> $y=ax+b$ に通る 2 点の座標を代入し，連立方程式を解くという「計算練習」はもはや不要であろう．また，座標を座標平面上にプロットすることは必ずしも必要がない．大切なのは与えられた 2 点の「相対的位置」である．それをつかんで図示することで，自ずと直線の「傾き」がわかる．この「傾き」と「通る 1 点」のペアは，直線を作成する際の最も多い条件の 1 つである．

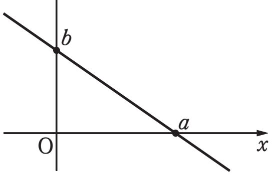
(2)　傾きは $\dfrac{-b}{a}=-\dfrac{b}{a}$

よって求める直線の方程式は

$y=-\dfrac{b}{a}x+b$

$b\neq 0$ より $\dfrac{y}{b}=-\dfrac{x}{a}+1$

つまり　$\mathbf{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$



> 直線が x 軸，y 軸と交わる座標，すなわち x 切片，y 切片がともにわかるため，両軸を含めて図示した．傾きもすぐにわかるため，y 切片とあわせて直線の方程式はすぐにつくることができる．この式を左のように変形することでできた直線の方程式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ を「切片方程式」という．x 切片が a，y 切片が b とわかるときに使うことができる．

4 直線 l：$3x+4y+5=0$ の傾きは $-\dfrac{3}{4}$ である．

よって点 $(1,\ 2)$ を通り直線 l と

平行な直線の方程式は　$y=-\dfrac{3}{4}(x-1)+2$

すなわち　$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{11}{4}}$

$(3x+4y-11=0,\ 3(x-1)+4(y-2)=0)$

垂直な直線の方程式は　$y=\dfrac{4}{3}(x-1)+2$

すなわち　$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}}$

$(4x-3y+2=0,\ 4(x-1)-3(y-2)=0)$

平行に加え,「垂直」な直線はこの分野では頻出のテーマである.「垂直」と「傾きの積が -1」を常に結びつけて考えられるようにしたい.
　また，作成した直線の方程式を「一般形」に直し，一般形で与えられたもとの直線の方程式と係数を比較してみると興味深い結果が得られる.
平行の場合は，x, y の係数が同じであり，また垂直の場合は，x, y の係数が逆になり，片方に $-$ がついたものとなっている.
ただし，容易な断言は危険である．例えば

$3x+4y-11=0$ と $6x+8y-22=0$

は，全く同じ直線の方程式を表しているが，x, y の係数は全く異なる．よって,「基礎確認事項」にもあったように,「比」で捉えられるようにしておくとよい.
　さらに，覚える必要はないが，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に
平行な直線：$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$
垂直な直線：$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ である.

5 (1)　$\boldsymbol{\mathrm{OA}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}$

(2)　直線 OA の方程式は　$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$

すなわち　$y_1x-x_1y=0$

よって点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ と直線 OA の距離 d は

$$d=\frac{|y_1x_2-x_1y_2|}{\sqrt{y_1{}^2+(-x_1)^2}}=\boldsymbol{\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}}$$

(3)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}\cdot\dfrac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|}$

点と直線の距離の「公式」を活用しよう．まず直線の方程式を「一般形」にする.
その上で,
・一般形で表された直線の方程式における「x, y の係数をそれぞれ 2 乗して和をとり，$\sqrt{}$ に入れた」ものが，求める距離の分母
・直線との距離を求めたい点を直線の一般形の式の左辺に「代入」して「絶対値をかぶせた」ものが，求める距離の分子
となる.
今回求めた三角形の面積の結果は「公式」として使うことができる．この「図形と方程式」の他に「ベクトル」において再登場する.

第 22 講　図形と方程式(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　$x^2+y^2+x-3y-1=0$ より　$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-1=0$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

よってこの円の中心は $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，半径は $\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

したがって求める円の半径は $\sqrt{14}$ より，

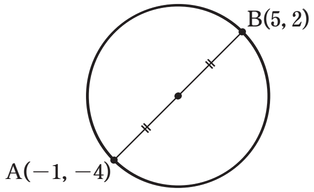
その方程式は　$\boldsymbol{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=14}$

> 平方完成により円の中心および半径がわかる．
> また，円の中心と半径がわかることで，円の方程式をつくることができる．
> いずれも $(半径)^2$ の形に注意．

(2)　求める円の中心は線分 AB の中点　$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-4+2}{2}\right)=(2,\ -1)$

半径は　$\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$　である．

よって求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x-2)^2+(y+1)^2=18}$



(3)　求める円は x 軸と接するので，

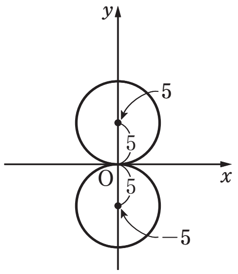
半径を $r(>0)$ とすると，中心の

y 座標は $\pm r$ である．

よって図より，求める円の方程式は

$\boldsymbol{x^2+(y-5)^2=25}$

$\boldsymbol{x^2+(y+5)^2=25}$



> (2)(3)「図形的」に中心と半径を求める問題である．

2 ［解法 1］　$x^2+y^2=2$ と $y=ax+2$ より

$x^2+(ax+2)^2=2$　つまり　$(a^2+1)x^2+4ax+2=0$　……①

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2a)^2-(a^2+1)\cdot 2=2a^2-2=2(a+1)(a-1)=0$$

よって　$\boldsymbol{a=\pm 1}$

①が重解をもつとき，その解は　$x=-\frac{2a}{a^2+1}$

$a=1$ のとき　①は重解　$x=-1$ をもつ．$a=-1$ のとき　①は重解　$x=1$ をもつ．

したがって，$a=1$ のとき接点 **(−1，1)**　　$a=-1$ のとき接点 **(1，1)**

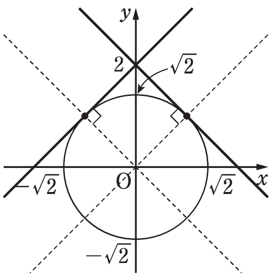
> ［解法 1］は円と直線の方程式を連立し，その解の個数，すなわち判別式の不等号で位置関係を扱う解法である．連立した方程式の解から，共有点を出すことができる．
> 　円と直線でこの解法を用いる必要のある問題は多くはない．

［解法 2］　円 $x^2+y^2=2$ の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $y=ax+2$　つまり　$ax-y+2=0$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|a\cdot 0-0+2|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}$$

これが円の半径 $\sqrt{2}$ と等しいとき，円と直線は接する．

よって　$\frac{2}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{2}$　　$\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}=2$



両辺を2乗して　$2(a^2+1)=4$　　$a^2=1$　　$\boldsymbol{a=\pm 1}$
直線 $y=ax+2$ と，これに垂直で円の中心を通る直線
$y=-\dfrac{1}{a}x$ の交点が求める接点である．
$a=1$ のとき　$y=x+2$ と $y=-x$ より　接点 $\boldsymbol{(-1,\ 1)}$
$a=-1$ のとき　$y=-x+2$ と $y=x$ より　接点 $\boldsymbol{(1,\ 1)}$

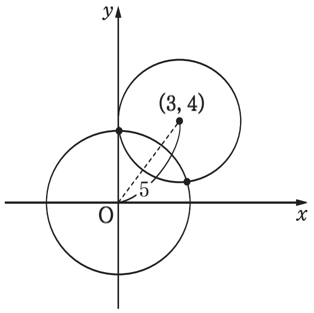
[解法2] は円の中心と直線との「距離」と，「半径」を比較することで位置関係を扱う解法である．接点を出すとき，直線と円を連立した式をつくるのはナンセンス．「接線と円の半径は接点において直交する」という性質を利用し，接点において接線と垂直な直線（法線という）をつくり，接線と法線を連立させて求める．

3 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ -4)$ における接線の方程式は
$\boldsymbol{3x-4y=25}$
円 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線の方程式は
$(-1-1)(x-1)+(2-3)(y-3)=5$　　つまり　$\boldsymbol{2x+y=0}$

円の接線を作成するときにこのように接点が出ているときは「公式」の恩恵を受けることができる．中心が原点でないときの出し方も覚えておこう．

4 円 $x^2+y^2=r^2$ の中心は $(0,\ 0)$，半径は r
円 $x^2-6x+y^2-8y+16=0$
つまり　$(x-3)^2+(y-4)^2=9$ の
中心は $(3,\ 4)$，半径は 3
2円の中心間距離は　$\sqrt{3^2+4^2}=5$
2円が異なる2点で交わるのは，
中心間距離が2円の半径の差より大きく和より小さいときである．
よって，$r-3<5<r+3$
$r-3<5$ より $r<8$　　$5<r+3$ より $2<r$
したがって，$\boldsymbol{2<r<8}$

2円の共有点の座標を求めるときは2円の式を連立すればよいが，座標の個数であれば中心間距離と2円の半径の和・差を利用するとよい．
外接：(中心間距離)＝(半径の和)
内接：(中心間距離)＝(半径の差)
特に半径の「差」の場合は「絶対値」がつくことが多い．今回の問題においては，2円が内接するときは半径 r の方が半径3より大きいことは明確であるため絶対値は不要である．



5 円 $x^2-2x+y^2-4=0$ と円 $x^2+(y-1)^2=1$ すなわち $x^2+y^2-2y=0$ の交点 P，Q を通る図形は $x^2-2x+y^2-4+k(x^2+y^2-2y)=0$　……①（k は定数）と表せる．
(1)　①が直線を表すのは　$k=-1$ のとき
このとき①は　$x^2-2x+y^2-4-(x^2+y^2-2y)=0$
つまり　$\boldsymbol{x-y+2=0}$
これが求める直線 PQ の方程式である．
(2)　①が点 $(2,\ 0)$ を通るとき，$-4+4k=0$　　よって　$k=1$
このとき①は　$x^2-2x+y^2-4+(x^2+y^2-2y)=0$
$2x^2+2y^2-2x-2y-4=0$
よって求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2-x-y-2=0}$

2つの図形の交点を通る図形の求め方である．交点を求めずに通る図形を求められることが大きなメリットとなる．
2図形のどちらの方程式に k を掛けても2図形の交点を通る図形をつくることができるが，つくった式は k をつけた方の図形自身を表すことはできない（ほとんどの問題では支障がない）．

第23講　図形と方程式(3)

【CHECK & UP】

1 点Pの座標を $(X,\ Y)$ とする．

条件 AP：BP＝1：2　より　2AP＝BP

両辺を2乗して　$4\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$4\{(X-1)^2+Y^2\}=X^2+(Y-2)^2$

$3X^2+3Y^2-8X+4Y=0$

$X^2+Y^2-\dfrac{8}{3}X+\dfrac{4}{3}Y=0$

$\left(X-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(Y+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{20}{9}$

（逆にこの式を満たす点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ は，条件 AP：BP＝1：2 を満たす）

したがって，求める点Pの軌跡は，**中心 $\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$　半径 $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ の円**である．

代表的な問題を通じ，軌跡を求める流れを身につけていこう．
まずは点Pの座標を先におく場合である．この問題に関しては，おき方は $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$，$(s,\ t)$ など何でもよい．当然，問題文に予め使われている文字は避けねばならないし，与えられている場合はそれを使う必要がある．
「軌跡」は図形であるから，軌跡の方程式だけ答えるわけにはいかない（「軌跡の方程式を求めよ」となっている場合は除く）．例えば $(s,\ t)$ とおいて解いた場合に出てくる式は s，t に関する式であり，「$s^2+t^2=1$」が「原点を中心とする半径1の円」となるわけである．
また，「逆に～」のくだりは，式変形において同値性が保たれている場合は省略してもよい．

2 $y=x^2+2ax-1=(x+a)^2-a^2-1$

よってこの放物線の頂点は　$(-a,\ -a^2-1)$ である．

この頂点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，

$X=-a$　……①　　$Y=-a^2-1$　……②

①より　$a=-X$　これを②に代入して

$Y=-(-X)^2-1$　つまり　$Y=-X^2-1$

したがって，求める点Pの軌跡は

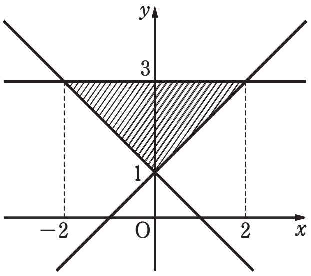
放物線　$y=-x^2-1$　である．

点Pの座標を求め，それを後から $(X,\ Y)$ と置き換える場合である．
この場合は，x 座標と y 座標が別の式として出てくる．そこには「パラメータ」が含まれているはずである．パラメータを消去し，2つの式を1つにつなげることができれば，それが求める軌跡の方程式である．
問題によっては2式をつなげるのに苦労する問題も存在する．さまざまな問題を通じて解法を学んでいくのがよい．

第24講　図形と方程式(4)

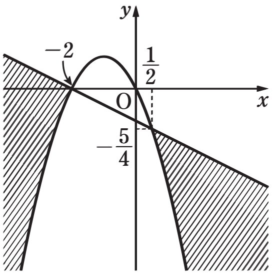
【CHECK & UP】

1 (1)



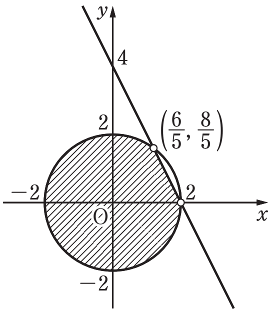
上図斜線部分．ただし境界は含まない．

(2)



上図斜線部分．ただし境界を含む．

(3)



上図斜線部分．ただし境界は，

直線 $2x+y-4=0$ 上の点は含まず，他は含む．

領域を描く練習問題である．境界線を境とした上下，内外を判断して斜線を引く．また，境界を含むか否かは明記すること．

斜線を引く領域については，境界によって区切られた領域のうち「図より明らかにその領域に入っている点」を代入して成立するかどうかを確かめる方法がある．原点などがその代表例であろう．

境界線が複数ある場合は，当然その「交点」が存在する．特に共有点を利用する場合は，境界を表す方程式を連立して解くことで共有点を出す必要がある．左は共有点を書き込んだものである．

この「共有点」を出すことで，境界線のそれぞれの相対的な位置関係が把握できるというメリットもある．それに対し，個々の「切片（x 切片，y 切片）」は使わない場合も少なくない．必要に応じていつでも連立して共有点を出せるようにしておこう．

テキスト解答

第１講　数と式・方程式・不等式

1　次の式を因数分解せよ．

(1)　$xy-yz+x^2-zx$

(2)　$x^2-4xy+3y^2+x-5y-2$

(3)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(1)　$xy-yz+x^2-zx=(x-z)y+x^2-xz$
$=(x-z)y+x(x-z)$
$=\boldsymbol{(x-z)(y+x)}$

(2)　$x^2-4xy+3y^2+x-5y-2=x^2+(-4y+1)x+3y^2-5y-2$
$=x^2+(-4y+1)x+(3y+1)(y-2)$
$=\{x-(3y+1)\}\{x-(y-2)\}$
$=\boldsymbol{(x-3y-1)(x-y+2)}$

(3)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(-b+c)a^2+(b^2-c^2)a+(bc^2-b^2c)$
$=-(b-c)a^2+(b-c)(b+c)a-bc(b-c)$
$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=-(b-c)(a-b)(a-c)$
$=\boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}$

2　[1]　(1)　$-1<a<3$，$2<b<5$ のとき，次の値の範囲を求めよ．

(i)　$\dfrac{3a-5}{2}$　　(ii)　$a+b$　　(iii)　$2a-3b$

(2)　$4x-3a<-2$ を満たす x の最大の整数が 5 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(1)　(i)　$-1<a<3$ より　$-3<3a<9$　　$-8<3a-5<4$　　よって　$\boldsymbol{-4<\dfrac{3a-5}{2}<2}$

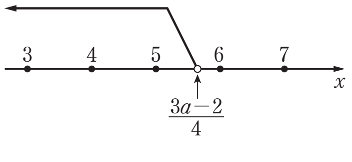
(ii)　$-1<a<3$，$2<b<5$ より　$\boldsymbol{1<a+b<8}$

(iii)　$-1<a<3$ より　$-2<2a<6$　　$2<b<5$ より　$-15<-3b<-6$

よって　$\boldsymbol{-17<2a-3b<0}$

(2)　$4x-3a<-2$ より　$4x<3a-2$　　$x<\dfrac{3a-2}{4}$

この範囲に含まれる最大の整数が 5 であることより



$5<\dfrac{3a-2}{4}\leqq 6$　　$20<3a-2\leqq 24$　　$22<3a\leqq 26$

ゆえに　$\boldsymbol{\dfrac{22}{3}<a\leqq\dfrac{26}{3}}$

2 ［2］　不等式 $|x+1|+|x-3|<4x$ を解け.

$|x+1|+|x-3|<4x$

$x \geqq 3$ のとき

$x+1+x-3<4x$　　$-2x<2$　　$x>-1$　　よって　$x \geqq 3$

$-1 \leqq x<3$ のとき

$x+1-x+3<4x$　　$-4x<-4$　　$x>1$　　よって　$1<x<3$

$x<-1$ のとき

$-x-1-x+3<4x$　　$-6x<-2$　　$x>\dfrac{1}{3}$　これは　$x<-1$ を満たさず不適.

以上より　$1<x<3$，$3 \leqq x$　　ゆえに　$\boldsymbol{1<x}$

3 ［1］　(1)　$x=1+\sqrt{3}$，$y=1-\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めよ.

(i)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　　(ii)　x^2+y^2　　(iii)　x^3+y^3

(2)　$x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき，次の式の値を求めよ．ただし，$x>1$ とする.

(i)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(ii)　$x-\dfrac{1}{x}$　　(iii)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}$

(1)　$x=1+\sqrt{3}$，$y=1-\sqrt{3}$ のとき　$x+y=2$，$xy=-2$

(i)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{2}{-2}=\boldsymbol{-1}$

(ii)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\cdot(-2)=\boldsymbol{8}$

(iii)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=2^3-3\cdot(-2)\cdot 2=\boldsymbol{20}$

(2)　(i)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=3^2-2=\boldsymbol{7}$

(ii)　$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\dfrac{1}{x^2}=7-2=5$

$x>1$ より　$0<\dfrac{1}{x}<1$　　よって　$x-\dfrac{1}{x}>0$　　したがって　$x-\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(iii)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=7^2-2=\boldsymbol{47}$

3 ［2］　次の x についての方程式，不等式を解け.

(1)　$||x-4|-3|=2$

(2)　$ax<x+b$

(1)　$||x-4|-3|=2$ より　$|x-4|-3=\pm 2$

よって　$|x-4|=5,\ 1$

$|x-4|=5$ より　$x-4=\pm 5$　　よって　$x=9,\ -1$

$|x-4|=1$ より　$x-4=\pm 1$　　よって　$x=5,\ 3$

以上より　$\boldsymbol{x=-1,\ 3,\ 5,\ 9}$

(2)　$ax<x+b$ より　$(a-1)x<b$

$a>1$ のとき　$x<\dfrac{b}{a-1}$

$a<1$ のとき　$x>\dfrac{b}{a-1}$

$a=1$ のとき　$0\cdot x<b$

$b>0$ のとき　解はすべての実数

$b\leqq 0$ のとき　解なし

よって　**$\boldsymbol{a>1}$　のとき　$\boldsymbol{x<\dfrac{b}{a-1}}$**

$\boldsymbol{a=1}$ かつ $\boldsymbol{b>0}$　のとき　解はすべての実数

$\boldsymbol{a=1}$ かつ $\boldsymbol{b\leqq 0}$　のとき　解なし

$\boldsymbol{a<1}$　のとき　$\boldsymbol{x>\dfrac{b}{a-1}}$

第2講　2次関数(1)

1 (1)　放物線 $y=-2x^2+3x-4$ を x 軸方向に1，y 軸方向に3平行移動した放物線の方程式を求めよ．

(2)　ある放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に1平行移動すると放物線 $y=3x^2-6x+4$ に重なった．定数 a，b，c の値を求めよ．

(1)　$y=-2x^2+3x-4=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{23}{8}$ より，頂点の座標は $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{23}{8}\right)$

よってこの放物線を x 軸方向に1，y 軸方向に3平行移動した放物線の頂点の座標は $\left(\frac{7}{4},\ \frac{1}{8}\right)$ である．

したがって，移動後の放物線の方程式は　$\boldsymbol{y=-2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{1}{8}}$　$(y=-2x^2+7x-6)$

(2)　題意より，放物線 $y=3x^2-6x+4$ を x 軸方向に2，y 軸方向に -1 平行移動するともとの放物線に重なる．

$y=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1$ より，この放物線の頂点の座標は $(1,\ 1)$ である．

この放物線を x 軸方向に2，y 軸方向に -1 平行移動した放物線の頂点の座標は $(3,\ 0)$

よって，もとの放物線の方程式は $y=3(x-3)^2=3x^2-18x+27$ である．

したがって，$\boldsymbol{a=3,\ b=-18,\ c=27}$

2　放物線 $y=2x^2-x+3$ を次の点や直線に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ．

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点　　(4)　直線 $x=1$

$y=2x^2-x+3=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$ より，この放物線の頂点の座標は $\left(\frac{1}{4},\ \frac{23}{8}\right)$

(1)　x 軸に関して対称に移動すると，頂点は $\left(\frac{1}{4},\ -\frac{23}{8}\right)$ に移動し，凸方向が逆となる．

よって求める式は　$\boldsymbol{y=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{23}{8}}$　$(y=-2x^2+x-3)$

(2)　y 軸に関して対称に移動すると，頂点は $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{23}{8}\right)$ に移動する．

よって求める式は　$\boldsymbol{y=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}}$　$(y=2x^2+x+3)$

(3)　原点に関して対称に移動すると，頂点は $\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{23}{8}\right)$ に移動し，凸方向が逆となる．

よって求める式は　$\boldsymbol{y=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{23}{8}}$　$(y=-2x^2-x-3)$

(4)　直線 $x=1$ に関して対称に移動すると，頂点は $\left(\frac{7}{4},\ \frac{23}{8}\right)$ に移動する．

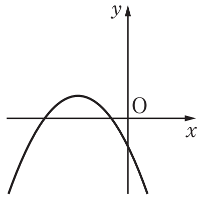
よって求める式は　$\boldsymbol{y=2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{23}{8}}$　$(y=2x^2-7x+9)$

3　右図は2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである．次の値の符号を調べよ．

(1)　a　　(2)　c

(3)　b　　(4)　$a+b+c$

(5)　b^2-4ac



$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ より，

軸は $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(1)　グラフは上に凸より，$a<0$　よって**負**.

(2)　y 切片が負より，$c<0$　よって**負**.

(3)　軸の x 座標が負より，$-\dfrac{b}{2a}<0$ である．$a<0$ より $b<0$　よって**負**.

(4)　$a+b+c$ は，$x=1$ のときの y 座標の値であり，グラフより**負**である.
すなわち $a+b+c<0$

(5)　頂点の y 座標が正より　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$ である．$a<0$ より $b^2-4ac>0$　よって**正**.

第３講　２次関数(2)

1 (1)　$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)=x^2-2ax+3a^2$ の最小値 $m(a)$ を a の式で表せ.
(2)　$0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)=x^2-2ax+3a^2$ の最大値 $M(a)$ を a の式で表せ.

$f(x)=x^2-2ax+3a^2=(x-a)^2+2a^2$　　軸：$x=a$　　定義域：$0 \leqq x \leqq 2$

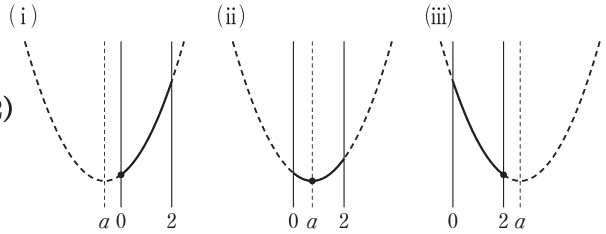
(1)　$a<0$ のとき　最小値は　$f(0)=3a^2$

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　最小値は　$f(a)=2a^2$

$2<a$ のとき　最小値は　$f(2)=3a^2-4a+4$

以上より

$$\boldsymbol{m(a)=\begin{cases} 3a^2 & (a<0) \\ 2a^2 & (0 \leqq a \leqq 2) \\ 3a^2-4a+4 & (2<a) \end{cases}}$$



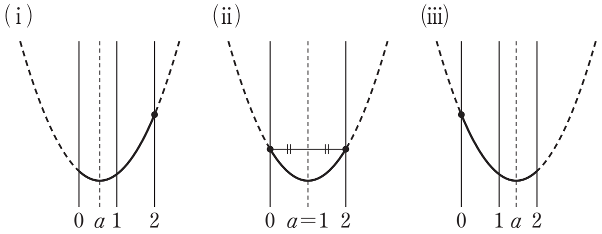
(2)　$a<1$ のとき　最大値は　$f(2)=3a^2-4a+4$

$a=1$ のとき　最大値は　$f(0)=f(2)=3$

$a>1$ のとき　最大値は　$f(0)=3a^2$

以上より

$$\boldsymbol{M(a)=\begin{cases} 3a^2-4a+4 & (a<1) \\ 3a^2 & (1 \leqq a) \end{cases}}$$



2 [1]　2 次関数 $f(x)=-x^2+6x-5$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値 $M(a)$ と最小値 $m(a)$ をそれぞれ a の式で表せ.

$f(x)=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$　　軸：$x=3$　　定義域：$0 \leqq x \leqq a$

$0 \leqq a<3$ のとき

最大値は　$f(a)=-a^2+6a-5$

最小値は　$f(0)=-5$

$3 \leqq a<6$ のとき

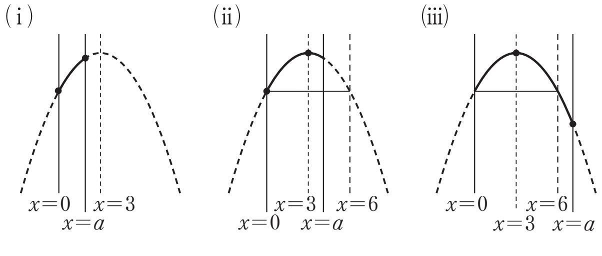
最大値は　$f(3)=4$

最小値は　$f(0)=-5$

$6 \leqq a$ のとき

最大値は　$f(3)=4$

最小値は　$f(a)=-a^2+6a-5$



以上より

$$M(a)=\begin{cases} -a^2+6a-5 & (0\leqq a<3) \\ 4 & (3\leqq a) \end{cases} \qquad m(a)=\begin{cases} -5 & (0\leqq a<6) \\ -a^2+6a-5 & (6\leqq a) \end{cases}$$

2 [2]　$x+y=3$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$3x^2+2y^2$ の最小値を求めよ．

(2)　$x\geqq 2$，$y\geqq -1$ のとき，$3x^2+2y^2$ の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$x+y=3$ より　$y=3-x$

$$3x^2+2y^2=3x^2+2(3-x)^2=5x^2-12x+18=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{54}{5}$$

したがって　$x=\frac{6}{5}$，$y=\frac{9}{5}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{54}{5}}$

(2)　$x+y=3$ より　$y=3-x$

これと $y\geqq -1$ より $3-x\geqq -1$　　よって　$x\leqq 4$

$x\geqq 2$ とあわせて　$2\leqq x\leqq 4$

$$3x^2+2y^2=5x^2-12x+18=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{54}{5} \qquad (2\leqq x\leqq 4)$$

したがって　$x=2$，$y=1$ のとき　**最小値 14**　　$x=4$，$y=-1$ のとき　**最大値 50**

3 (1)　放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 5)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ．

(2)　定義域を $-2\leqq x\leqq 1$ とする関数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ の最大値が 6，最小値が 3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

(1)　求める放物線の頂点は直線 $y=2x+1$ 上の点であることより $(t,\ 2t+1)$ とおける．

さらにその放物線は，放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したものであることより

その式は　$y=-2(x-t)^2+2t+1$　とおける．

これが点 $(2,\ 5)$ を通ることより

$$5=-2(2-t)^2+2t+1 \qquad t^2-5t+6=0 \qquad t=2,\ 3$$

したがって　求める放物線の式は　$\boldsymbol{y=-2(x-2)^2+5}$，$\boldsymbol{y=-2(x-3)^2+7}$

(2)　$a=0$ のとき　$f(x)=b$　これは x の値に関わらず一定より，不適．

$a\neq 0$ のとき　$f(x)$ は 2 次関数である．

$f(x)=ax^2+2ax+b=a(x+1)^2-a+b$　　軸：$x=-1$　　定義域：$-2\leqq x\leqq 1$

$a>0$ のとき　$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線

よって　最大値は $f(1)=3a+b$　　最小値は $f(-1)=-a+b$　であることより

$3a+b=6$，$-a+b=3$　したがって $a=\frac{3}{4}$，$b=\frac{15}{4}$　これは $a>0$ を満たす.

　　$a<0$ のとき　$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線

よって　最大値は $f(-1)=-a+b$　最小値は $f(1)=3a+b$　であることより

$-a+b=6$，$3a+b=3$　　したがって　$a=-\frac{3}{4}$，$b=\frac{21}{4}$

これは $a<0$ を満たす.

　以上より　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(\frac{3}{4},\ \frac{15}{4}\right),\ \left(-\frac{3}{4},\ \frac{21}{4}\right)}$

第４講　２次関数(3)

1 (1) 次の２次関数のグラフと x 軸との共有点の座標を求めよ．

(i) $y=-x^2+2x+3$　(ii) $y=2x^2-4x+2$　(iii) $y=4(x-1)^2-5$

(2) 放物線 $y=3x^2-4x-1$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3) x 軸と２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(3,\ -1)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

(1) (i) $y=-x^2+2x+3=-(x^2-2x-3)=-(x+1)(x-3)$ より　$\boldsymbol{(-1,\ 0),\ (3,\ 0)}$

(ii) $y=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2$ より　$\boldsymbol{(1,\ 0)}$

(iii) $y=4(x-1)^2-5$ に $y=0$ を代入して

$$4(x-1)^2-5=0 \qquad (x-1)^2=\frac{5}{4} \qquad x-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

よって　$x=+1\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

したがって　$\boldsymbol{\left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{2},\ 0\right),\ \left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2},\ 0\right)}$

(2) $y=3x^2-4x-1$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は

$3x^2-4x-1=0$ より　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

よって求める線分の長さは $\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}-\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{7}}{3}}$

(3) x 軸と２点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わることより，求める放物線は

$y=a(x+1)(x-2)$　とおける．これが点 $(3,\ -1)$ を通るので

$$-1=a\cdot4\cdot1 \qquad a=-\frac{1}{4}$$

よって求める放物線の式は　$y=-\dfrac{1}{4}(x+1)(x-2)$

したがって　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}}$

2 関数 $y=mx^2+2mx+1$ ……①　について，次の問いに答えよ．

(1) ①のグラフと x 軸との共有点の個数を調べよ．

(2) ①のグラフが x 軸と接するとき，その接点の座標を求めよ．

(1) $m=0$ のとき　①の式は $y=1$　　よって x 軸との共有点の個数は０個

$m\neq0$ のとき　判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=m^2-m=m(m-1)$ より

$m<0,\ 1<m$ のとき　$D>0$ より　x 軸との共有点の個数は２個

$m=1$ のとき　$D=0$ より　x 軸との共有点の個数は１個

$0<m<1$ のとき　$D<0$ より　x 軸との共有点の個数は０個

以上より　**$m<0$，$1<m$ のとき2個　$m=1$ のとき1個　$0\leqq m<1$ のとき0個**

(2)　①のグラフが x 軸と接するのは(1)より $m=1$ のとき．

このとき①は $y=x^2+2x+1=(x+1)^2$ より　求める接点の座標は　**$(-1,\ 0)$**

> **3**　(1)　x についての2次不等式 $x^2-(1-a)x-a>0$ を解け．
>
> (2)　2次不等式 $ax^2+bx+12>0$ の解が $-2<x<3$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

(1)　$x^2-(1-a)x-a>0$ より　$(x+a)(x-1)>0$

$-a<1$ つまり **$a>-1$ のとき　$x<-a$，$1<x$**

$a=-1$ のとき　$x=1$ 以外のすべての実数

$a<-1$ のとき　$x<1$，$-a<x$

(2)　条件より関数 $y=ax^2+bx+12$ のグラフは上に凸であり，

x 軸との交点の x 座標は $x=-2,\ 3$ である．

よって　$a<0$ かつ　$ax^2+bx+12=0$ の2解が $x=-2,\ 3$ である．

ゆえに　$4a-2b+12=0$ かつ $9a+3b+12=0$

したがって　**$a=-2$，$b=2$**　($a<0$ を満たす)

第5講　2次関数(4)

1　すべての実数 x に対して，$(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$　……①　が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ．

$a=1$ のとき　①より $1>0$　これは x の値に関わらず成り立つ．

$a=-1$ のとき　①より $-2x+1>0$　これはすべての x では成り立たず不適．

$a\neq\pm1$ のとき　①の左辺は x の2次関数である．

よって，$a^2-1>0$　……②　かつ　$D<0$　……③　であればよい．

②より　$(a+1)(a-1)>0$　よって　$a<-1,\ 1<a$

③より　$(a-1)^2-4(a^2-1)\cdot1<0$

$(a-1)\{(a-1)-4(a+1)\}<0$　$(a-1)(3a+5)>0$　よって　$a<-\frac{5}{3},\ 1<a$

したがって，②かつ③より　$a<-\frac{5}{3},\ 1<a$

以上より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a<-\frac{5}{3},\ 1\leqq a}$

2　2次方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　①が $x=-2$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ．

(2)　①が $-2<x<0$ に2解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(3)　①が $x<-2$ と $-2<x<0$ に1解ずつ解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

(4)　①が $-2<x<0$ に少なくとも1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

$f(x)=x^2+(a+2)x-a+1$ とおく．

(1)　$f(-2)=4+(a+2)\cdot(-2)-a+1=-3a+1$　　$f(-2)=0$ より　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$

このとき　①は $x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=0$　　$3x^2+7x+2=0$　　$(3x+1)(x+2)=0$　より

他の解は　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{3}}$

(2)　$f(0)=-a+1>0$　より　$a<1$

$f(-2)>0$ より　$a<\frac{1}{3}$

$y=f(x)$ のグラフの軸　$x=-\frac{a+2}{2}$ について　$-2<-\frac{a+2}{2}<0$

よって　$-2<a<2$

判別式 $D\geqq0$ より　$(a+2)^2-4\cdot1\cdot(-a+1)\geqq0$　　$a^2+8a\geqq0$

よって　$a\leqq-8,\ 0\leqq a$

以上より　$\boldsymbol{0\leqq a<\frac{1}{3}}$

(3)　$f(-2)<0$　かつ　$f(0)>0$ であればよい.

$f(-2)<0$ より　$a>\frac{1}{3}$

$f(0)>0$ より　$a<1$

以上より　$\boldsymbol{\frac{1}{3}<a<1}$

(4)　①が $-2<x<0$ と $0<x$ に1解ずつ解をもつのは，$f(-2)>0$　かつ　$f(0)<0$ のときである.

ところが $a<\frac{1}{3}$　かつ　$a>1$ を満たす a の値は存在しない.

また(1)より，$a=\frac{1}{3}$ のとき　①は $x=-\frac{1}{3}$ を解にもち，適する.

さらに　$f(0)=0$ とすると　$a=1$ であるから

このとき①は $x^2+3x=0$　　$x(x+3)=0$　より　$x=0$，-3 を2解にもち，不適.

以上と(1)～(3)より，求める a の範囲は　$0\leqq a<\frac{1}{3}$，$a=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}<a<1$

つまり　$\boldsymbol{0\leqq a<1}$ である.

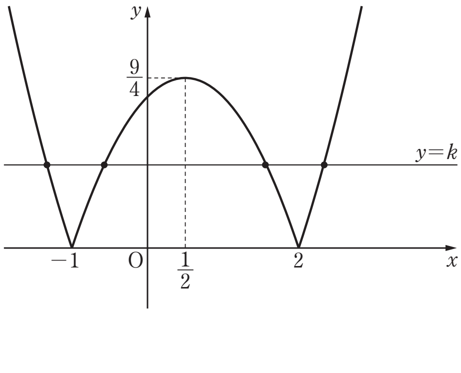
3　(1)　x の方程式 $|x^2-x-2|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ.

(2)　x の方程式 $|x^2-x-2|=2x+k$ の異なる実数解の個数を求めよ.

---

(1)　関数 $y=|x^2-x-2|=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|$ のグラフは右図.

これと直線 $y=k$ との異なる共有点の個数が求める実数解の個数である.



よって　**$0<k<\frac{9}{4}$ のとき　4個**

$k=\frac{9}{4}$ のとき　3個

$k>\frac{9}{4}$，$k=0$ のとき　2個

$k<0$ のとき　0個

(2)　$|x^2-x-2|=2x+k$ より　$|x^2-x-2|-2x=k$

$$y=|x^2-x-2|-2x$$

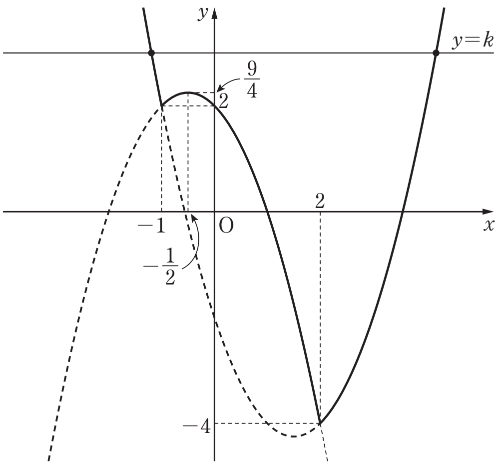
$$=\begin{cases} x^2-x-2-2x=x^2-3x-2 & (x\leqq -1,\ 2\leqq x) \\ -x^2+x+2-2x=-x^2-x+2 & (-1<x<2) \end{cases}$$

よって，$x\leqq-1$，$2\leqq x$ のとき　$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$

$-1<x<2$ のとき　$y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

これよりグラフは右図.

これと直線 $y=k$ との異なる共有点の個数が求める実数解の個数である.



よって　$2<k<\frac{9}{4}$ のとき　**4個**

$k=2,\ \frac{9}{4}$ のとき　**3個**

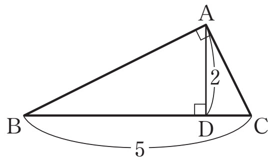
$-4<k<2,\ \frac{9}{4}<k$ のとき　**2個**

$k=-4$ のとき　**1個**

$k<-4$ のとき　**0個**

第6講　三角比(1)

1 [1]　右図のような直角三角形 ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を D とする．$AB>AC$，$BC=5$，$AD=2$ とするとき，$\sin B$，$\cos B$ の値を求めよ．



$\triangle ABD \backsim \triangle CBA \backsim \triangle CAD$ より $BD:AD=AD:CD$　つまり　$BD:2=2:CD$

よって　$BD\cdot CD=4$

ここで $BD=x$ とおくと $CD=5-x$

したがって　$x\cdot(5-x)=4$　　$x^2-5x+4=0$　　$x=1,\ 4$

ここで　$AB>AC$ より $DB>DA$ かつ $DA>DC$

ゆえに　$BD>DC$ であるから　$BD=4$，$CD=1$

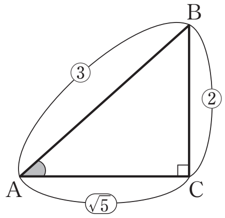
三平方の定理より　$AB=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

よって　$\sin B=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$，$\cos B=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

1 [2]　$\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC で，$\sin A=\dfrac{2}{3}$ のとき，次の三角比の値を求めよ．

(1)　$\cos A$，$\tan A$　　(2)　$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$

$C=90^\circ$ である三角形 ABC においては A は鋭角．



$\sin A=\dfrac{2}{3}$ より　$AB:BC:CA=3:2:\sqrt{5}$

(1)　$\boldsymbol{\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$　　$\boldsymbol{\tan A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

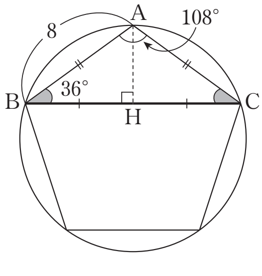
(2)　$B=90^\circ-A$ より

$\sin B=\cos A=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$　　$\cos B=\sin A=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$　　$\tan B=\dfrac{1}{\tan A}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

2 [1]　1辺の長さが 8 である正五角形の対角線の長さを求めよ．ただし，必要ならば $\cos 36^\circ=0.8090$ を用いよ．

1辺の長さが 8 である正五角形の1つの内角の大きさは

$(180^\circ\times3)\div5=108^\circ$



よって右図の二等辺三角形 ABC において，

頂角 A の二等分線と辺 BC が交わる点を H とすると，

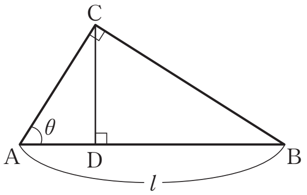
$\angle ABH=36^\circ$

したがって　$BH=AB\cos36^\circ=8\cos36^\circ$

ゆえに求める対角線の長さは　$2BH=16\cos36^\circ=16\times0.8090=\boldsymbol{12.944}$

2 ［2］　$C=90^\circ$ の直角三角形 ABC において，頂点 C から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB との交点を D とする．$\mathrm{AB}=l$，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とするとき，次の長さを l，θ を用いて表せ．

（1）　AC　　（2）　BC　　（3）　AD　　（4）　CD



（1）　$\mathrm{AC}=\boldsymbol{l\cos\theta}$　　（2）　$\mathrm{BC}=\boldsymbol{l\sin\theta}$

（3）　$\mathrm{AD}=\mathrm{AC}\cos\theta=\boldsymbol{l\cos^2\theta}$　　（4）　$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\sin\theta=\boldsymbol{l\sin\theta\cos\theta}$

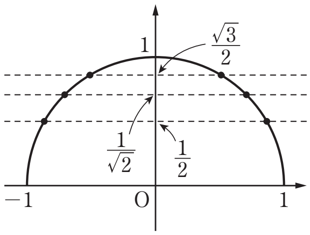
3 ［1］　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．t が次の値をとるとき，$\sin\theta=t$ を満たす θ の値を求めよ．

（1）　$t=0$　　（2）　$t=\dfrac{1}{2}$　　（3）　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　（4）　$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（5）　$t=1$

（1）　$\boldsymbol{\theta=0^\circ,\ 180^\circ}$　　（2）　$\boldsymbol{\theta=30^\circ,\ 150^\circ}$

（3）　$\boldsymbol{\theta=45^\circ,\ 135^\circ}$　　（4）　$\boldsymbol{\theta=60^\circ,\ 120^\circ}$

（5）　$\boldsymbol{\theta=90^\circ}$



3 ［2］　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．s が次の値をとるとき，$\cos\theta=s$ を満たす θ の値を求めよ．

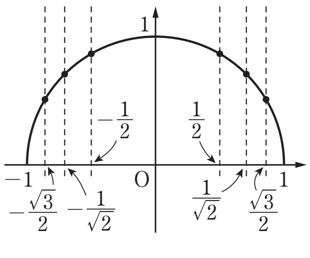
（1）　$s=0$　　（2）　$s=\dfrac{1}{2}$　　（3）　$s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　（4）　$s=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（5）　$s=1$

（6）　$s=-\dfrac{1}{2}$　　（7）　$s=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　（8）　$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（9）　$s=-1$

（1）　$\boldsymbol{\theta=90^\circ}$　　（2）　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$　　（3）　$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$

（4）　$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$　　（5）　$\boldsymbol{\theta=0^\circ}$　　（6）　$\boldsymbol{\theta=120^\circ}$

（7）　$\boldsymbol{\theta=135^\circ}$　　（8）　$\boldsymbol{\theta=150^\circ}$　　（9）　$\boldsymbol{\theta=180^\circ}$



第７講　三角比(2)

1 [1]　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．t が次の値をとるとき，$\tan\theta = t$ を満たす θ の値を求めよ．

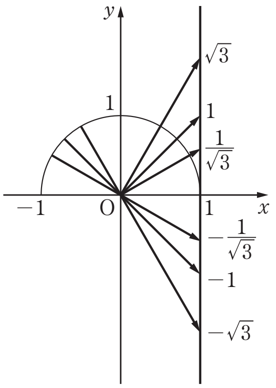
(1)　$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(2)　$t = 1$　(3)　$t = \sqrt{3}$　(4)　$t = -\sqrt{3}$

(5)　$t = -1$　(6)　$t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(7)　$t = 0$

(1)　$\boldsymbol{\theta = 30°}$　(2)　$\boldsymbol{\theta = 45°}$　(3)　$\boldsymbol{\theta = 60°}$

(4)　$\boldsymbol{\theta = 120°}$　(5)　$\boldsymbol{\theta = 135°}$　(6)　$\boldsymbol{\theta = 150°}$

(7)　$\boldsymbol{\theta = 0°，180°}$



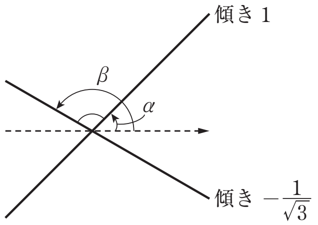
1 [2]　2 直線 $y = x - 1$ と $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 2$ のなす鋭角を求めよ．

2 直線 $y = x - 1$，$y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x + 2$ と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ α，β とする．

$\tan\alpha = 1$ より　$\alpha = 45°$

$\tan\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\beta = 150°$

$\beta - \alpha = 105°$　より求める鋭角は **75°**



2　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1)　$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき $\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき

(1)　$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$ より　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = \dfrac{25}{169}$

$0° < \theta < 90°$ のとき　$\cos\theta > 0$ より　$\cos\theta = \boldsymbol{\dfrac{5}{13}}$　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \boldsymbol{\dfrac{12}{5}}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき　$\cos\theta<0$ より　$\cos\theta=-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}$　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}$

(2)　$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$\tan\theta>0$ より θ は鋭角であるので　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$　　$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$

3　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3)　$\sin\theta-\cos\theta$　　(4)　$\sin\theta$，$\cos\theta$

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を２乗して

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　　$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　　よって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right\}=\dfrac{\mathbf{5\sqrt{2}}}{\mathbf{8}}$

(3)　(1)より　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\sin\theta\geqq0$　　よって　$\cos\theta<0$

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

$\sin\theta-\cos\theta>0$ より　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}}$

(4)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　……①　　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　……②

①＋②より　$2\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　　よって　$\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

①－②より　$2\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$　　よって　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

第8講　三角比と平面図形(1)

1　△ABC において BC＝a，CA＝b，AB＝c とする．次の問いに答えよ．
(1)　$\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$ のとき，最大角の大きさを求めよ．
(2)　次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ．
$$(a-c\cos B)\sin B=(b-c\cos A)\sin A$$

(1)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

つまり　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$

同様に　$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

よって　$\sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{a}{2R}:\dfrac{b}{2R}:\dfrac{c}{2R}=a:b:c$　より $a:b:c=3:5:7$

したがって，$a=3k$，$b=5k$，$c=7k$　$(k>0)$ とおける．

c が最大辺より，C が最大角である．よって，余弦定理より

$$\cos C=\frac{9k^2+25k^2-49k^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=\frac{-15k^2}{2\cdot 3\cdot 5k^2}=-\frac{1}{2}$$　ゆえに最大角 C の大きさは **120°**

(2)　△ABC の外接円の半径を R とすると，

$(a-c\cos B)\sin B=(b-c\cos A)\sin A$　より正弦定理・余弦定理を用いて

$$\left(a-c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)\cdot\frac{b}{2R}=\left(b-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot\frac{a}{2R}$$

$$\frac{2a^2-(c^2+a^2-b^2)}{2a}\cdot b=\frac{2b^2-(b^2+c^2-a^2)}{2b}\cdot a$$

$$(a^2+b^2-c^2)b^2=(a^2+b^2-c^2)a^2$$

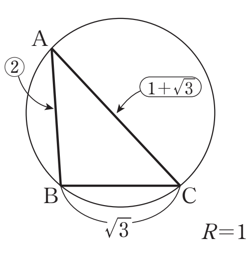
$$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$a+b>0$ より　$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

したがって，**BC＝AC の二等辺三角形　または　∠C＝90° の直角三角形**

2　鋭角三角形 ABC において BC＝a，CA＝b，AB＝c とする．$a=\sqrt{3}$，$b:c=(1+\sqrt{3}):2$，外接円の半径が 1 であるとき，b，c の値および角 A，B，C の大きさをを求めよ．



正弦定理より　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A}=2\cdot 1$　　$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A は鋭角より $\boldsymbol{A=60°}$

また，$b:c=(1+\sqrt{3}):2$ より

$b=(1+\sqrt{3})k$，$c=2k$　$(k>0)$ とおける．

余弦定理より　$3=\{(1+\sqrt{3})k\}^2+(2k)^2-2\cdot(1+\sqrt{3})k\cdot 2k\cdot\cos 60°$

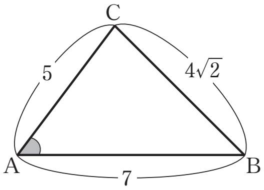
$6k^2=3$　　$k^2=\frac{1}{2}$　　$k>0$ より　$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$b=(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$，$c=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

正弦定理により　$\frac{\sqrt{2}}{\sin C}=2\cdot1$　　$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C は鋭角より　$\boldsymbol{C=45°}$

よって　$\boldsymbol{B=75°}$

3 ［1］　△ABC において，AB＝7，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝5 のとき，次の問いに答えよ．
(1)　△ABC の面積 S を求めよ．
(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ．



(1)　余弦定理より　$\cos A=\frac{49+25-32}{2\cdot7\cdot5}=\frac{42}{2\cdot7\cdot5}=\frac{3}{5}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

したがって，$S=\frac{1}{2}\cdot\text{AB}\cdot\text{AC}\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\frac{4}{5}=\boldsymbol{14}$

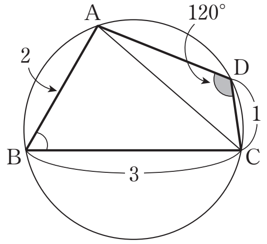
【別解】　$s=\frac{1}{2}(7+4\sqrt{2}+5)=6+2\sqrt{2}$　とおくと，ヘロンの公式により

$$
\begin{aligned}
S&=\sqrt{s(s-7)(s-4\sqrt{2})(s-5)}\\
&=\sqrt{(6+2\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})}\\
&=\sqrt{(36-8)(8-1)}=\sqrt{28\cdot7}\\
&=\boldsymbol{14}
\end{aligned}
$$

(2)　$S=\frac{1}{2}r(\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})$ より

$14=\frac{1}{2}r(7+4\sqrt{2}+5)$　　$(6+2\sqrt{2})r=14$　　$r=\frac{7}{3+\sqrt{2}}=\frac{7(3-\sqrt{2})}{9-2}=\boldsymbol{3-\sqrt{2}}$

3 ［2］　円 O に内接する四角形 ABCD において，AB＝2，BC＝3，CD＝1，
∠ADC＝120° を満たす．このとき次の問いに答えよ．
(1)　AC の長さを求めよ．
(2)　AD の長さを求めよ．
(3)　円 O の半径を求めよ．
(4)　四角形 ABCD の面積を求めよ．



(1)　$\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = 60^\circ$

よって △ABC について余弦定理より

$$AC^2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 4 + 9 - 6 = 7$$

したがって　$\mathbf{AC = \sqrt{7}}$

(2)　$AD = x$ とおくと，△ACD について余弦定理より

$$7 = 1 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

$x^2 + x - 6 = 0$　　$(x+3)(x-2) = 0$　　$x = -3,\ 2$　　よって　$\mathbf{AD = 2}$

(3)　円 O の半径を R とすると，△ABC について正弦定理より

$$2R = \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} \qquad \text{よって} \quad R = \frac{\sqrt{7}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{\sqrt{21}}{3}}$$

(4)　(四角形 ABCD)＝△ABC＋△ACD

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2\sqrt{3}}$$

第９講　三角比と平面図形(2)

1 (1) △ABC において，AB＝5，AC＝4，∠A＝60° とする．∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

(2) △ABC において，BC＝5，CA＝4，AB＝6 とする．∠C の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ．

(1) AD＝x とすると，△ABC＝△ABD＋△ACD より

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\cdot \sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot \sin 30^\circ$$

$$5\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=5x\cdot \frac{1}{2}+4x\cdot \frac{1}{2}\qquad 9x=20\sqrt{3}\qquad x=\frac{20\sqrt{3}}{9}$$

よって　$\mathbf{AD=\frac{20\sqrt{3}}{9}}$

(2) △ABC について余弦定理より

$$\cos A=\frac{16+36-25}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{27}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{9}{16}$$

角の二等分線の性質により　AD：BD＝CA：CB＝4：5

よって　$\mathrm{AD}=\frac{4}{9}\mathrm{AB}=\frac{4}{9}\cdot 6=\frac{8}{3}$

したがって，△ACD で余弦定理より

$$\mathrm{CD}^2=16+\frac{64}{9}-2\cdot 4\cdot \frac{8}{3}\cdot \frac{9}{16}=\frac{100}{9}$$　ゆえに　$\mathbf{CD=\frac{10}{3}}$

2 AB＝BC＝3，CD＝5，DA＝8 である四角形 ABCD が円に内接している．このとき，次のものを求めよ．

(1) 対角線 AC の長さ

(2) 四角形 ABCD の面積

(3) 対角線 AC と BD の交点を E とするとき，BE：ED

(1) ∠ABC＝θ とすると，∠ADC＝180°－θ

△ABC で余弦定理より　$\mathrm{AC}^2=9+9-2\cdot 3\cdot 3\cdot \cos\theta=18-18\cos\theta$　……①

△ADC で余弦定理より　$\mathrm{AC}^2=64+25-2\cdot 8\cdot 5\cdot \cos(180^\circ-\theta)=89+80\cos\theta$　……②

①，②より　$18-18\cos\theta=89+80\cos\theta$　　$\cos\theta=-\frac{71}{98}$

このとき①より　$\mathrm{AC}^2=18-18\cdot\left(-\frac{71}{98}\right)=18\left(1+\frac{71}{98}\right)=18\cdot\frac{169}{98}=\frac{9\cdot 169}{49}$

よって　$\mathrm{AC}=\frac{3\cdot 13}{7}=\mathbf{\frac{39}{7}}$

(2) (四角形 ABCD)＝△ABC＋△ADC

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \sin(180^\circ-\theta)=\frac{1}{2}(9\sin\theta+40\sin\theta)$$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 49\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{2}\cdot 49\cdot\sqrt{1-\dfrac{71^2}{98^2}}=\dfrac{1}{2}\cdot 49\cdot\sqrt{\dfrac{98^2-71^2}{98^2}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{49}{98}\sqrt{(98+71)(98-71)}=\dfrac{1}{4}\sqrt{169\cdot 27}=\mathbf{\dfrac{39\sqrt{3}}{4}}$

(3)　$\mathrm{BE}:\mathrm{ED}=\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ADC}=\left(\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin\theta\right):\left(\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\sin\theta\right)$

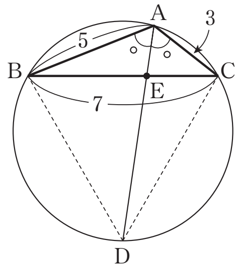
$=(3\cdot 3):(8\cdot 5)=\mathbf{9:40}$

3　△ABC において，AB＝5，BC＝7，CA＝3 とする．∠A の二等分線が △ABC の外接円と交わる点を D，直線 AD と直線 BC の交点を E とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　∠A の大きさおよび線分 AE の長さを求めよ．
(2)　線分 BE，DE の長さを求めよ．
(3)　外接円の中心を O，半径を R とする．R の長さおよび tan∠OBD の値を求めよ．

(1)　余弦定理より　$\cos A=\dfrac{9+25-49}{2\cdot 3\cdot 5}=-\dfrac{1}{2}$　　よって　$\angle\mathbf{A=120^\circ}$

△ABC＝△ABE＋△ACE より



$\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin 60^\circ$

$8\,\mathrm{AE}=15$　　よって　$\mathbf{AE=\dfrac{15}{8}}$

(2)　角の二等分線の性質より　BE：CE＝AB：AC＝5：3

よって　$\mathrm{BE}=\dfrac{5}{8}\mathrm{BC}=\dfrac{5}{8}\cdot 7=\mathbf{\dfrac{35}{8}}$　　したがって　$\mathrm{CE}=\dfrac{21}{8}$

方べきの定理により　AE・DE＝BE・CE

つまり　$\dfrac{15}{8}\cdot\mathrm{DE}=\dfrac{35}{8}\cdot\dfrac{21}{8}$　　よって　$\mathbf{DE=\dfrac{49}{8}}$

(3)　△ABC で正弦定理より　$2R=\dfrac{7}{\sin 120^\circ}$　　よって　$R=\mathbf{\dfrac{7}{\sqrt{3}}}$

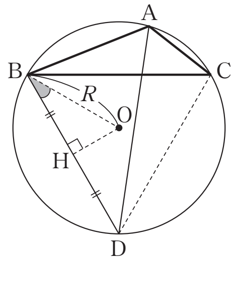
したがって　$\mathrm{OB}=R=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

ここで，弧 DC に対する円周角より　∠DBC＝∠DAC＝60°

弧 BD に対する円周角より　∠BCD＝∠BAD＝60°

よって △BCD は正三角形であることより，BD＝BC＝7

また，O から線分 BD に垂線を下ろしたときの交点を H とすると，円の弦の性質により H は線分 BD の中点である．



よって　$\mathrm{BH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BD}=\dfrac{7}{2}$

したがって三平方の定理より

$$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{\frac{49}{3}-\frac{49}{4}}=7\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\frac{7}{\sqrt{12}}$$

ゆえに　$\tan\angle\mathrm{OBD}=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{BH}}=\dfrac{\frac{7}{\sqrt{12}}}{\frac{7}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{12}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

（※　$\angle\mathrm{BOD}=2\angle\mathrm{BAD}=2\cdot60^\circ=120^\circ$

$\triangle\mathrm{OBD}$ は $\mathrm{OB}=\mathrm{OD}$ の二等辺三角形であるから，

$$\angle\mathrm{OBD}=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle\mathrm{BOD})=\frac{1}{2}\cdot60^\circ=30^\circ$$

よって　$\tan\angle\mathrm{OBD}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　）

第10講　集合・場合の数(1)

1　1から100までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ．

(1)　偶数

(2)　3で割り切れない整数

(3)　2でも3でも割り切れる整数

(4)　2と3の少なくとも一方で割り切れる整数

(5)　3で割り切れるが2で割り切れない整数

(6)　2と3の少なくとも一方で割り切れない整数

1から100までの整数全体の集合を U，そのうち2の倍数全体の集合を A，3の倍数全体の集合を B とする．

$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$，$B=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$

(1)　$n(A)=\mathbf{50}$ **(個)**

(2)　$n(U)=100$，$n(B)=33$ より，$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=100-33=\mathbf{67}$ **(個)**

(3)　2でも3でも割り切れる，すなわち6の倍数全体の集合は

$A\cap B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$　より　$n(A\cap B)=\mathbf{16}$ **(個)**

(4)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=50+33-16=\mathbf{67}$ **(個)**

(5)　$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=33-16=\mathbf{17}$ **(個)**

(6)　$n(\overline{A}\cup\overline{B})=n(\overline{A\cap B})=n(U)-n(A\cap B)=100-16=\mathbf{84}$ **(個)**

2　[1]　$x+y\leqq4$ を満たす正の整数 x，y の組はいくつあるか．

$x+y\leqq4$ となるのは

$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$　の**6組**

【別解】　$x+y\leqq4$ となるのは次の通り

(i)　$x+y=2$　　(ii)　$x+y=3$　　(iii)　$x+y=4$

(i)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 1)$　の1通り

(ii)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$　の2通り

(iii)のとき　$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ の　3通り

(i)，(ii)，(iii)は排反より，求める場合の数は　$1+2+3=\mathbf{6}$ **(組)**

2　[2]　(1)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ を展開した式の項は何個あるか．

(2)　360の正の約数の個数と，その総和を求めよ．

(1)　$(a+b)(c+d+e)(f+g+h+i)$ を展開した式の項は

(a，b のいずれか1つ)×(c，d，e のいずれか1つ)×(f，g，h，i のいずれか1つ)

の形である．よってその項の個数は　$2\times3\times4=\mathbf{24}$ **(個)**

(2)　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$ より，360の正の約数は

　　$(2^3$ の正の約数の1つ$)\times(3^2$ の正の約数の1つ$)\times(5$ の正の約数の1つ$)$

の形で表される．

　2^3 の正の約数は　1，2，2^2，2^3 の4個

　3^2 の正の約数は　1，3，3^2 の3個

　5の正の約数は　1，5の2個

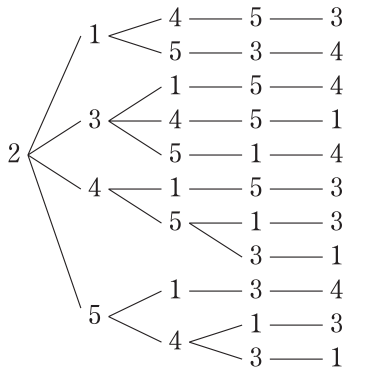
よって約数の個数は　$4\times3\times2=$**24（個）**

また，約数の総和は　$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\cdot13\cdot6=$**1170**

3　5冊の異なる本がそれぞれ対応するブックケースに1冊ずつ入っている．それぞれの本をブックケースから取り出したあと，すべて間違ったブックケースに入れる方法は何通りあるか．ただし，ブックケースはすべて異なるとする．

5冊の異なる本を1，2，3，4，5とする．求める場合の数は，1から5の数字を順番に並べたとき，k 番目に k の数字がこない $(k=1，2，3，4，5)$ ときの並べ方の総数である．

1番目が2のとき，そのような並べ方は以下．



よって11通り．

1番目が3，4，5のときも同様に11通りある．

したがって，求める場合の数は　$11\times4=$**44（通り）**

第 11 講　場合の数(2)

1 ［1］ 父母と子供 3 人が 1 列に並ぶとき，次の問いに答えよ．
　(1) 父母が両端にくる場合は何通りあるか．
　(2) 父母の間に子供が 2 人以上入る場合は何通りか．

父母と子供 3 人の合計 5 人の並べ方の総数は　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$（通り）

(1) 父母が両端にくるとき，その並び方は　2! 通り
　子供 3 人の並び方が　3! 通り
　したがって求める並び方の総数は　$2!\times3!=2\times6=$ **12（通り）**

(2) 父母の間に子供が 2 人のみ入るとき
　父母の間に入る子供の 2 人の並び方が　${}_3P_2$ 通り
　父母の並び方は　2! 通り
　父母と間に入る子供 2 人を 1 組として考えると，並び方は　2! 通り
　よってこの場合の並び方の総数は　${}_3P_2\times2!\times2!=3\cdot2\times2\times2=24$（通り）
　父母の間に子供が 3 人入るとき，(1)より 12 通り
　したがって，求める並び方の総数は　$24+12=$ **36（通り）**

【別解】 父母と子供 3 人の合計 5 人の並べ方の総数は 120 通り．
　父母の間に子供が 2 人以上入らないのは以下のとき．
　　(i) 父母が隣り合う場合　　(ii) 父母の間に子供が 1 人のみ入る場合
　(i)のとき，父母を 1 組として考えると，並び方は　4! 通り
　　父母の並び方は　2! 通り　　よって並び方の総数は　$4!\times2!=48$（通り）
　(ii)のとき，父母の間に入る子供 1 人の選び方が 3 通り
　　父母とその子供の 3 人を 1 組として考えると，並び方は　3! 通り
　　父母の並び方は　2! 通り　　よって並び方の総数は　$3\times3!\times2!=36$（通り）
　よって求める並び方の総数は　$120-(48+36)=$ **36（通り）**

1 ［2］ 6 個の数字 0，1，2，3，4，5 から異なる 3 個を用いて 3 桁の整数をつくる．このとき，次のものは何個できるか．
　(1) 3 の倍数　　(2) 324 より小さい整数

(1) 3 の倍数となるのは，各位の数字の和が 3 の倍数となるときである．
　その 3 つの数字の組合せは (0，1，2)，(0，1，5)，(0，2，4)，(0，4，5)，(1，2，3)，(1，3，5)，(2，3，4)，(3，4，5)　の 8 通りである．このうち
　0 を含むものについては，百の位は 0 以外の数字であることよりその並べ方の総数はそれぞれ　$2\times2!=4$（通り）
　0 を含まないものについては，その並べ方の総数はそれぞれ　$3!=6$（通り）
　したがって求める総数は　$4\times4+6\times4=$ **40（個）**

(2) 百の位が 1 または 2 のものは，$2\times{}_5P_2=40$（個）

「百の位が3」かつ「10の位が0または1」のものは　$2\times4=8$（個）

百の位が3，十の位が2のものは320，321の2(個)

よって，324より小さい整数は　$40+8+2=$**50（個）**

2［1］　6個の異なる玉を次のように分けて入れる方法は何通りあるか．ただし，空箱がないようにするものとする．

(1)　A，B 2つの箱に分ける　　(2)　2つに分ける

(3)　A，B，C 3つの箱に分ける

---

(1)　6個の玉をそれぞれA，Bのいずれに入れるかを決める方法が

$2\times2\times2\times2\times2\times2=2^6=64$（通り）

このうち空箱ができるのは，玉をすべてA，すべてBに入れる2通り

したがって求める総数は　$64-2=$**62（通り）**

(2)　(1)においてA，Bの区別をなくして　$62\div2=$**31（通り）**

(3)　6個の玉をそれぞれA，B，Cに入れる方法が　$3^6=729$（通り）

このうち，空箱ができる場合を除く．

空箱が2箱のとき，玉をすべてA，B，Cのいずれか1つに入れる3通り

空箱が1箱のとき，その空箱の決め方が3通り

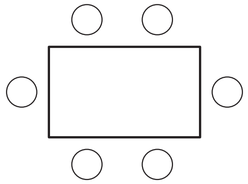
残り2箱に空箱ができないように入れる方法が(1)より62通り

したがって求める総数は　$729-3-62\times3=$**540（通り）**

2［2］　6人の家族を次のように座らせる方法は何通りあるか．

(1)　6人から4人選んで円形のテーブルに座らせる

(2)　6人を右の図のようなテーブルに座らせる



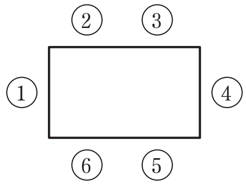
---

(1)　6人から4人選んで並べる順列は　${}_6P_4=360$（通り）

このうち，円順列にすると同じになるものが4通りずつある．

したがって，求める総数は　$360\div4=$**90（通り）**

(2)　ある特定の人を右図①に固定すると，残りの人の並べ方は5!通りである．それはその人が②～⑥に座る場合も同様である．ところが，①と④，②と⑤，③と⑥に座る場合の中に，180°回転させると同じ順列となるものが他に必ず1つずつある．



よって求める総数は　$5!\times6\div2=6!\div2=$**360（通り）**

3 黒玉1個，赤玉2個，白玉4個がある．次の問いに答えよ．

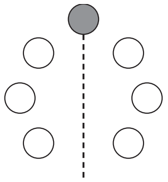
(1) 机の上に円形に置いて並べるとき，並べ方は何通りあるか.

(2) 糸を通して首飾りを作るとき，何通りの首飾りができるか.

(1) 黒玉の位置を固定した残り6個の並べ方が求める総数である.

よって　$\dfrac{6!}{2!4!}={}_6C_2=\mathbf{15}$ **(通り)**

(2) (1)の15通りのうち，線対称のものを考える.



黒玉を通る円の中心線によって区切られた左右3個がそれぞれ赤玉1個，白玉2個であり，さらに線対称であるものは右側3個の並べ方の　$\dfrac{3!}{2!}={}_3C_1=3$（通り）だけある.

この3通りを除く残り12通りの中には，裏返すともとと一致するものがそれぞれ必ず1つずつある．したがって求める総数は　$12\div2+3=\mathbf{9}$ **(通り)**

第12講　場合の数(3)

1 ［1］　自然数 n，r に対して，${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}$ が成り立つことを証明せよ.

${}_{n}C_{r}$ は n 個の異なるものから r 個を選ぶ場合の総数である.

n 個の異なるものを 1，2，……，n とする.

1 を選ぶ場合は，残り $n-1$ 個から $r-1$ 個選ぶ場合で，${}_{n-1}C_{r-1}$ 通り

1 を選ばない場合は，1 を除く $n-1$個から r 個選ぶ場合で，${}_{n-1}C_{r}$ 通り

選び方は 1 を選ぶ場合と選ばない場合に分けられ，重複はなく，それですべてである.

したがって，${}_{n}C_{r}={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_{r}$ が成り立つ.

1 ［2］　8 人の子供を次のように分ける方法は何通りあるか. (1)　4 人，3 人，1 人の 3 組に分ける (2)　2 人ずつ A，B，C，D の 4 組に分ける (3)　2 人，2 人，2 人，1 人，1 人の 5 組に分ける

(1)　8 人から 4 人選び，残った 4 人から 3 人選べばよい.

よって分け方の総数は　${}_{8}C_{4}\times{}_{4}C_{3}=70\times4=$**280（通り）**

(2)　A に入れる 2 人を選ぶ方法が　${}_{8}C_{2}$ 通り

次に B に入れる 2 人を選ぶ方法が　${}_{6}C_{2}$ 通り

さらに C に入れる 2 人を選ぶ方法が　${}_{4}C_{2}$ 通り

残った 2 人は D に定まる.

したがって分け方の総数は　${}_{8}C_{2}\times{}_{6}C_{2}\times{}_{4}C_{2}=28\times15\times6=$**2520（通り）**

(3)　2 人，2 人，2 人，1 人，1 人の組をそれぞれ A，B，C，D，E とすると

A，B，C，D，E に入れる方法は(2)と同様にして　${}_{8}C_{2}\times{}_{6}C_{2}\times{}_{4}C_{2}\times{}_{2}C_{1}=5040$（通り）

A，B，C の区別をなくすと同じ分け方がそれぞれ 3! 通りずつでき，

D，E の区別をなくすと同じ分け方がそれぞれ 2! 通りずつできる.

したがって求める分け方の総数は　$\dfrac{5040}{3!2!}=$**420（通り）**

2 ［1］　mathematics という 11 文字から 4 文字を取って並べる方法は何通りあるか.

mathematics には m，a，t が 2 個ずつ，h，e，i，c，s が 1 個ずつ含まれている.

(i)　同じ文字を 2 個ずつ含む場合（○○□□）

使う文字の種類は m，a，t から 2 種類選ぶ方法で　${}_{3}C_{2}=3$（通り）

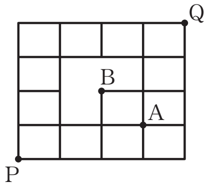
選んだ文字に対しその順列は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

よってこの場合の数は　$3\times6=18$（通り）

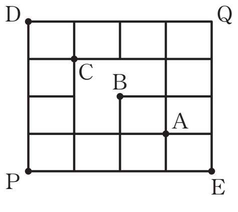
(ii)　同じ文字 2 個を 1 組のみ含む場合（○○□△）

使う文字の種類は m，a，t から 1 種類選び，それを 2 個使う文字とし，
選ばなかった 2 種類と h，e，i，c，s を含む 7 種類の文字から 2 種類選ぶ方法で
${}_3C_1\times{}_7C_2=3\times21=63$（通り）
選んだ文字に対し，その順列は　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）
よってこの場合の数は　$63\times12=756$（通り）
(iii)　すべて異なる文字の場合
m，a，t，h，e，i，c，s の 8 種類から 4 種類選んでそれを並べる方法で
${}_8P_4=1680$（通り）
以上より，求める順列の総数は　$18+756+1680=$**2454（通り）**

2 ［2］　右の図の P 地点から Q 地点に至る最短経路について，
次の問いに答えよ．
(1)　A 地点を通る経路は何通りあるか．
(2)　B 地点を通る経路は何通りあるか．
(3)　最短経路は全部で何通りあるか．



(1)　P から A までの最短経路は　$\dfrac{4!}{3!}={}_4C_1=4$（通り）
A から Q までの最短経路は　${}_4C_1=4$（通り）
したがって求める最短経路の総数は　$4\times4=$**16（通り）**
(2)　P から B までの最短経路は　${}_3C_1\times1=3$（通り）
B から Q までの最短経路は　$1\times{}_3C_1=3$（通り）
したがって求める最短経路の総数は　$3\times3=$**9（通り）**
(3)　右図のように点 C，D，E を定めると，P から Q の最短経路は，
A 地点を通る場合，B 地点を通る場合，C 地点を通る場合，
D 地点を通る場合，E 地点を通る場合に分けられる．
C 地点を通る場合の最短経路は　${}_4C_1\times{}_4C_1=16$（通り）
D 地点を通る場合の最短経路は　$1\times1=1$（通り）
E 地点を通る場合の最短経路は　$1\times1=1$（通り）



したがって，求める最短経路の総数は　$16+9+16+1+1=$**43（通り）**

3 [1] a, b, c, d はそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 のうちいずれかの数であるとする．次の問いに答えよ． (1) $a<b<c<d$ となる $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は何個あるか． (2) $a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は何個あるか．

(1) 1, 2, 3, 4, 5 の 5 種類から異なる 4 個を選び，それを小さい順に a, b, c, d とする方法と同数で，その総数は　${}_5\mathrm{C}_4=$**5（個）**

(2) 1, 2, 3, 4, 5 の 5 種類から重複を許して 4 個選び，それを大きくない順に a, b, c, d とする方法で，その総数は 4 個の○と 4 本の｜の総順列に等しい．

したがって求める総数は　$\dfrac{8!}{4!4!}={}_8\mathrm{C}_4=$**70（個）**

3 [2] $x+y+z=10$ を満たす整数 x, y, z について，次の問いに答えよ． (1) 0 以上の整数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか． (2) 自然数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか．

(1) x, y, z の 3 種類から重複を許して 10 個を選ぶ方法で，その総数は 10 個の○と 2 本の｜の総順列に等しい．

したがって求める総数は　$\dfrac{12!}{10!2!}={}_{12}\mathrm{C}_2=$**66（個）**

(2) x, y, z の 3 種類から重複を許しかつどれも 0 個にならないように 10 個を選ぶ方法で，その総数は 10 個の○の間 9 カ所のいずれか 2 カ所に｜を 1 本ずつ入れる総数に等しい．

したがって求める総数は　${}_9\mathrm{C}_2=$**36（個）**

第 13 講　確率(1)

1　りんご 2 個，みかん 2 個，桃 1 個の合計 5 個の果物について，次の問いに答えよ．

(1)　5 個の果物から 4 個を選び，1 列に並べる方法は何通りあるか．

(2)　5 個の果物から 4 個を選び 1 列に並べるとき，りんごが隣り合って並ぶ確率を求めよ．

(1)　(i)　同じ種類の果物を 2 個ずつ含む場合

りんご 2 個，みかん 2 個を選ぶ場合で，その並べ方は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

(ii)　同じ種類の果物を 1 組のみ含む場合

同じ果物がりんご，みかんの場合で　2 通り

選ばなかった方 1 個と桃 1 個を含む 4 個の並べ方は　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

よってこの場合の数は　$2\times12=24$（通り）

したがって，並べ方の総数は　$6+24=$ **30（通り）**

(2)　2 個のりんごを A_1，A_2，2 個のみかんを B_1，B_2，桃を C とし，すべて区別して考える．

これら 5 個の果物から 4 個を選んで 1 列に並べる方法は　${}_5P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2$（通り）

りんごが隣り合うためには，A_1，A_2 を 4 個の中に含む必要がある．

A_1，A_2 を選ぶとき，残り　B_1，B_2，C の 3 個の中から 2 個を選ぶ方法が　${}_3C_2=3$（通り）

選んだ 4 個を，A_1，A_2 が隣り合うように並べる方法について，

A_1，A_2 を 1 組として 3 個を並べる方法が　3! 通り

A_1，A_2 の並べ方が　2! 通り

よって，A_1，A_2 が隣り合う並べ方は　$3!\times2!=12$（通り）

したがって，求める確率は　$\dfrac{3\times12}{{}_5P_4}=\dfrac{3\times12}{5\cdot4\cdot3\cdot2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

2　1 から 10 までの数字が書かれた 10 枚のカードが袋に入っている．この袋の中から 3 枚のカードを同時に取り出す．次の確率を求めよ．

(1)　5 のカードを取り出す確率

(2)　カードの数字の最大が 8 以上である確率

(3)　1 または 2 のカードを取り出す確率

1 から 10 までのカードの中から 3 枚を同時に取り出す方法が　${}_{10}C_3=10\cdot3\cdot4$（通り）

(1)　5 のカードを取り出すとき，残り 9 枚から 2 枚を取り出す方法が　${}_9C_2=9\cdot4$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{{}_9C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{9\cdot4}{10\cdot3\cdot4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(2)　最大の数字が 8 以上になるのは，最大の数字が 8，9，10 のいずれかのときである．

最大の数字が 8 のとき，1 から 7 までの 7 枚から 2 枚を取り出す方法で　${}_7C_2=21$（通り）

最大の数字が 9 のとき，1 から 8 までの 8 枚から 2 枚を取り出す方法で　${}_8C_2=28$（通り）

最大の数字が10のとき，1から9までの9枚から2枚を取り出す方法で　${}_9C_2=36$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{21}{{}_{10}C_3}+\dfrac{28}{{}_{10}C_3}+\dfrac{36}{{}_{10}C_3}=\dfrac{85}{10\cdot3\cdot4}=\boldsymbol{\dfrac{17}{24}}$

【別解】 最大の数字が7以下になる事象をAとすると，求める確率は　$1-P(A)$である．

事象Aは1から7までの7枚から3枚を取り出すときで　${}_7C_3=7\cdot5$（通り）

したがって求める確率は　$1-\dfrac{7\cdot5}{{}_{10}C_3}=1-\dfrac{7\cdot5}{10\cdot3\cdot4}=1-\dfrac{7}{24}=\boldsymbol{\dfrac{17}{24}}$

(3)　1を取り出すとき，残りのカードの取り出し方が　${}_9C_2=36$（通り）

2を取り出すとき，残りのカードの取り出し方が　${}_9C_2=36$（通り）

1と2を取り出すとき，残りのカードの取り出し方が　${}_8C_1=8$（通り）

よって求める確率は　$\dfrac{36}{{}_{10}C_3}+\dfrac{36}{{}_{10}C_3}-\dfrac{8}{{}_{10}C_3}=\dfrac{64}{10\cdot3\cdot4}=\boldsymbol{\dfrac{8}{15}}$

【別解】 最小の数字が3以上になる事象をBとすると，求める確率は　$1-P(B)$である．

事象Bは3から10までの8枚から3枚を取り出すときで　${}_8C_3=8\cdot7$（通り）

したがって求める確率は　$1-\dfrac{8\cdot7}{{}_{10}C_3}=1-\dfrac{8\cdot7}{10\cdot3\cdot4}=1-\dfrac{7}{15}=\boldsymbol{\dfrac{8}{15}}$

3　赤球3個，白球7個が入った袋Aと，赤球5個，白球5個が入った袋Bがある．それぞれの袋から同時に2個ずつ球を取り出す場合を考える．次の確率を求めよ．

(1)　少なくとも1個の赤球が含まれている確率

(2)　赤球，白球の両方が含まれている確率

(3)　赤球2個，白球2個を取り出す確率

---

(1)　取り出した球がすべて白球であるのは，Aから白球2個，Bから白球2個取り出した場合．

その確率は　$\dfrac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{7\cdot3}{5\cdot9}\times\dfrac{5\cdot2}{5\cdot9}=\dfrac{14}{135}$

よって，少なくとも1個の赤球が含まれている確率は　$1-\dfrac{14}{135}=\boldsymbol{\dfrac{121}{135}}$

(2)　取り出した球がすべて赤球である確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{3}{5\cdot9}\times\dfrac{5\cdot2}{5\cdot9}=\dfrac{2}{135}$

よって，赤球，白球の両方が含まれている確率は　$1-\left(\dfrac{14}{135}+\dfrac{2}{135}\right)=1-\dfrac{16}{135}=\boldsymbol{\dfrac{119}{135}}$

(3)　赤球2個，白球2個となるのは，以下の場合

(i)　Aから赤球2個，Bから白球2個を取り出す

(ii)　Aから赤球1個と白球1個，Bから赤球1個と白球1個を取り出す

(iii)　Aから白球2個，Bから赤球2個を取り出す

(i)の確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}\times\dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{2}{135}$

(ii)の確率は　$\dfrac{{}_3C_1 \cdot {}_7C_1}{{}_{10}C_2} \times \dfrac{{}_5C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_{10}C_2} = \dfrac{3 \cdot 7}{5 \cdot 9} \times \dfrac{5 \cdot 5}{5 \cdot 9} = \dfrac{35}{135}$

(iii)の確率は　$\dfrac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2} \times \dfrac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} = \dfrac{14}{135}$

したがって求める確率は　$\dfrac{2}{135} + \dfrac{35}{135} + \dfrac{14}{135} = \dfrac{51}{135} = \boldsymbol{\dfrac{17}{45}}$

第 14 講　確率(2)

1　円周を 6 等分する点を時計回りの順に A，B，C，D，E，F とし，点 P は点 A を出発点として時計回りに円周上の点を移動する．さいころを振って偶数の目が出たときは 2，奇数の目が出たときは 1 だけ動くこととする．点 P がちょうど点 A に着いたときに終了する．

(1)　ちょうど 1 周して終了する確率を求めよ．

(2)　ちょうど 2 周して終了する確率を求めよ．

(1)　ちょうど 1 周して終了するとき，偶数の目が x 回，奇数の目が y 回出るとすると

$2x+y=6$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$

これを満たす整数 $(x,\ y)$ の組は　$(x,\ y)=(0,\ 6),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (3,\ 0)$

偶数の目，奇数の目がそれぞれ何回目に出たかを考え，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{43}{64}}$$

(2)　ちょうど 2 周して終了するのは，A から F に進み，A に止まらず B に進み，B から A に進む場合である．

A から F に進むとき，$2x+y=5$ より　$(x,\ y)=(0,\ 5),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1)$

その確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{32}$

F から A に止まらず B に進むのは，偶数の目が出たときで，その確率は $\frac{1}{2}$

B から A に進むのは，A から F に進むのと同じで，その確率は $\frac{21}{32}$

したがって，求める確率は　$\frac{21}{32}\times\frac{1}{2}\times\frac{21}{32}=\boldsymbol{\frac{441}{2048}}$

2　[1]　A，B 2 つの袋があって，A には白球 4 個と赤球 6 個，B には白球 5 個と赤球 5 個が入っている．A から 1 球取り出して B に入れ，よくかきまぜてから 1 球取り出して A に入れるとき，次の確率を求めよ．

(1)　A の白球の数が増加する確率

(2)　A の白球の数が減少する確率

(3)　A の白球の数が変わらない確率

(1)　A の白球が増えるのは，A から赤球を取り出し，B から白球を取り出すとき．

よって求める確率は　$\frac{6}{10}\times\frac{5}{11}=\boldsymbol{\frac{3}{11}}$

(2)　A の白球が減るのは，A から白球を取り出し，B から赤球を取り出すとき．

よって求める確率は　$\frac{4}{10}\times\frac{5}{11}=\boldsymbol{\frac{2}{11}}$

(3)　A の白球の数が変わらないのは，(1)(2)以外のとき．

よって求める確率は　$1-\left(\frac{3}{11}+\frac{2}{11}\right)=\mathbf{\frac{6}{11}}$

2 ［2］　白球5個と赤球3個が入っている袋から，1個ずつ順に3個の球を取り出した．1番目の球が赤であるとき，3番目の球が白である確率を求めよ．

1番目に取り出した球が赤である事象を A，3番目に取り出した球が白である事象を B とする．$A\cap B$ は1番目から順に赤赤白，または赤白白，と出る場合である．

$$P(A)=\frac{3}{8},\quad P(A\cap B)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{3}{8}\left(\frac{10}{42}+\frac{20}{42}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$$

したがって求める確率は　$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\mathbf{\frac{5}{7}}$

【別解】　1番目に赤球を取り出したとき，残りの球は白球5個，赤球2個である．ここから次の2回で順に赤白，または白白，と出ればよい．

したがって求める確率は　$P_A(B)=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{5}{7}}$

3　2個のさいころを同時に投げるとき，2個のさいころの出目の和の期待値を求めよ．

出目の和に対し，2つのさいころの出目の組合せを考える．

和が2 ･･･ <u>(1，1)</u>　　和が3 ･･･ (1，2)　　和が4 ･･･ (1，3)，<u>(2，2)</u>

和が5 ･･･ (1，4)，(2，3)　　和が6 ･･･ (1，5)，(2，4)，<u>(3，3)</u>

和が7 ･･･ (1，6)，(2，5)，(3，4)　　和が8 ･･･ (2，6)，(3，5)，<u>(4，4)</u>

和が9 ･･･ (3，6)，(4，5)　　和が10 ･･･ (4，6)，<u>(5，5)</u>

和が11 ･･･ (5，6)　　和が12 ･･･ <u>(6，6)</u>

それぞれの出目がどちらのさいころで出たかを順列で考えると，＿＿＿の組合せに対しては1通り，それ以外は2! 通り．したがって求める期待値は

$$2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}$$
$$+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$=\frac{1}{36}(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12)$$

$$=\frac{1}{36}\times 252$$

$$=\mathbf{7}$$

第15講　命題と証明

1　次の［　　］に最も適するものを下の選択肢①～④から1つ選べ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$x<2$ は $x\leqq 2$ であるための［　　］.

(2)　$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための［　　］.

(3)　$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための［　　］.

(4)　$x^2\leqq 4$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための［　　］.

(5)　$x+y,\ xy$ がともに有理数であることは，$x,\ y$ がともに有理数であるための［　　］.

①　必要十分条件である　②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない　④　必要条件でも十分条件でもない

(1)「$x<2 \implies x\leqq 2$」は明らかに真．よって十分条件である．

「$x\leqq 2 \implies x<2$」は偽（反例：$x=2$）．よって必要条件ではない．

したがって，③

(2)「$a^2>b^2 \implies a>b$」は偽（反例：$a=-2,\ b=1$）．よって十分条件ではない．

「$a>b \implies a^2>b^2$」は偽（反例：$a=1,\ b=-2$）．よって必要条件ではない．

したがって，④

(3)　a が実数のとき　$a^2\geqq 0$（等号成立は　$a=0$ のとき）

同様に，$b^2\geqq 0$（等号成立は　$b=0$ のとき）

よって　$a^2+b^2\geqq 0$（等号成立は　$a=b=0$ のとき）

したがって，「$a^2+b^2=0 \iff a=b=0$」　ゆえに　①

(4)　$x^2\leqq 4$　より　$-2\leqq x\leqq 2$

$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$　より　$-\dfrac{3}{2}<x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{2}$　つまり　$-2<x<1$

「$x^2\leqq 4 \implies \left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$」は偽（反例：$x=-2$）．よって十分条件ではない．

「$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2} \implies x^2\leqq 4$」は真．よって必要条件である．

したがって，②

(5)「$x+y,\ xy$ がともに有理数 $\implies$ $x,\ y$ がともに有理数」は偽

（反例：$x=3-\sqrt{2},\ y=3+\sqrt{2}$）．

よって十分条件ではない．

「$x,\ y$ がともに有理数 $\implies$ $x+y,\ xy$ がともに有理数」は明らかに真．

よって必要条件である．

したがって，②

> **2** (1) 整数 n について，n^2 が3の倍数であるならば，n は3の倍数であることを証明せよ．
> (2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ．ただし，(1)の結果を使ってよいものとする．

(1) 与えられた命題の対偶は，整数 n に関して

「n が3の倍数でないならば，n^2 は3の倍数ではない」である．

以下，k を整数とする．

$n=3k+1$ のとき　$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$n=3k+2$ のとき　$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ は整数であることより，$n=3k+1$，$3k+2$ のいずれの場合も n^2 は3の倍数ではない．したがって対偶が真より，もとの命題も真である．

(2) $\sqrt{3}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，

$\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$　（m，n は互いに素の自然数）と表される．

このとき，$\sqrt{3}\,m=n$　より　$3m^2=n^2$　……①

①の左辺は3の倍数より，右辺も3の倍数である．

よって(1)の結果から，n^2 が3の倍数より，n は3の倍数である．

したがって，$n=3k$（k：自然数）と表される．

このとき①より　$3m^2=(3k)^2$　であるから　$m^2=3k^2$

よって同様に m は3の倍数であることがわかる．

ゆえに，m と n は公約数3をもち，互いに素であることに矛盾する．

したがって背理法により，$\sqrt{3}$ は無理数である．

> **3** [1] 次の命題の真偽をそれぞれ調べよ．
> (1) すべての実数 x について，$x^2-1>0$
> (2) ある実数 x について，$x^2+x+1\leqq 0$

(1) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x^2-1=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}<0$ より　$x^2-1>0$ は成立しない．

したがって　**偽**.

(2) $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

よってすべての実数 x で $x^2+x+1>0$ より，$x^2+x+1\leqq 0$ となる実数 x は存在しない．

したがって　**偽**.

③ ［2］　実数 x に関する式 $ax^2+bx+c=0$ がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ．

（必要条件）　$ax^2+bx+c=0$ がどんな x の値に対しても成り立つとき

$x=0$ で成り立つので　$c=0$　……①

$x=1$ で成り立つので　$a+b+c=0$　……②

$x=-1$ で成り立つので　$a-b+c=0$　……③

①〜③より　$a=b=c=0$　これが必要条件である．

（十分条件）　$a=b=c=0$ のとき

$ax^2+bx+c=0\cdot x^2+0\cdot x+0$

よってどんな x の値に関しても $ax^2+bx+c=0$ が成り立つ．

ゆえに　$a=b=c=0$ は十分条件である．

以上より，$\boldsymbol{a=b=c=0}$　が求める必要十分条件である．

第 16 講　式と証明(1)

1 [1]　$\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$ を計算せよ.

$$\frac{1}{n(n-2)}+\frac{1}{(n-2)(n-4)}+\frac{1}{(n-4)(n-6)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-(n-6)}{(n-6)n}=\boldsymbol{\frac{3}{n(n-6)}}$$

1 [2]　次の計算をせよ.

(1)　$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$　　(2)　$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

(1)　$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$

$$=x+2+\frac{2}{x+2}-\left(x+2+\frac{2}{x+3}\right)$$
$$=\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+3}$$
$$=2\cdot\frac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\boldsymbol{\frac{2}{(x+2)(x+3)}}$$

(2)　$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

$$=1+\frac{-1}{x+2}-\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)-\left(1+\frac{-1}{x+4}\right)+\left(1+\frac{-1}{x+5}\right)$$
$$=-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$$
$$=\frac{-(x+3)+x+2}{(x+2)(x+3)}+\frac{x+5-(x+4)}{(x+4)(x+5)}$$
$$=-\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$
$$=\frac{-(x+4)(x+5)+(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$
$$=-\frac{4x+14}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}=\boldsymbol{-\frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}}$$

2 ［1］　実数 a，b，c について $a+b+c=0$ のとき，
等式 $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3=0$ が成り立つことを証明せよ．

$$(\text{左辺})=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$$

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3$$

$$=-1-1-1+3=0$$

よって　$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3=0$

2 ［2］　次の不等式が成り立つことを証明せよ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$a>b>0$，$c>d>0$ のとき，$ac>bd$

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

(3)　$|x+y|\leqq|x|+|y|$

(1)　$a>b>0$，$c>d>0$ より

$ac-bd>bc-bd=b(c-d)>0$　　よって　$ac>bd$

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=(ay-bx)^2\geqq0$

よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

等号成立は　$ay=bx$　のときである．

(3)　$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2$

$=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2+2xy+y^2)$

$=2(|xy|-xy)\geqq0$

よって　$|x+y|^2\leqq(|x|+|y|)^2$

$|x+y|\geqq0$，$|x|+|y|\geqq0$　より　$|x+y|\leqq|x|+|y|$

等号成立は　$|xy|=xy$　より　$xy\geqq0$　のとき

つまり　$xy>0$ または $xy=0$ より　$x=0$ または $y=0$ または x，y が同符号のときである．

3　(1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{4}{x+1}$ の最小値を求めよ．

(2)　x^{11} を x^2+x+1 で割った余りを求めよ．

(1)　$x+\dfrac{4}{x+1}=x+1+\dfrac{4}{x+1}-1$

ここで $x>0$ より　$x+1>0$

よって，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$x+1+\frac{4}{x+1}-1\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=4-1=3$$

等号成立は　$x+1=\dfrac{4}{x+1}$　　$(x+1)^2=4$　　$(x-1)(x+3)=0$

$x>0$ より　$x=1$ のとき．

したがって，求める最小値は **3**　($x=1$ のとき)

(2)　x^{11} を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，余りは $ax+b$ (a，b は実数) とおける．

このとき　$x^{11}=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$　……①

ここで，$x^2+x+1=0$ の虚数解の1つを ω とすると　$\omega^2+\omega+1=0$

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\qquad \omega^3-1=0\qquad よって\quad \omega^3=1$$

①の両辺に $x=\omega$ を代入して

$$\omega^{11}=a\omega+b$$

$\omega^{11}=(\omega^3)^3\cdot\omega^2=\omega^2=-\omega-1$ より　$-\omega-1=a\omega+b$

a，b は実数より　$a=-1$，$b=-1$

したがって，求める余りは　$\boldsymbol{-x-1}$

第 17 講　式と証明(2)

1　(1)　実数 s，t が $s+t=p$，$st=3$ を満たすとき，実数 p のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　2 次方程式 $x^2-(k+6)x+6=0$ の解がすべて整数となるような定数 k の値と，そのときの整数解をすべて求めよ．

(1)　$s+t=p$，$st=3$ より，s，t は 2 次方程式 $x^2-px+3=0$ の 2 解である．

2 解 s，t が実数より　判別式を D とすると

$D=p^2-12\geqq 0$　　したがって　$\boldsymbol{p\leqq -2\sqrt{3}}$**，**$\boldsymbol{2\sqrt{3}\leqq p}$

(2)　2 次方程式　$x^2-(k+6)x+6=0$　の 2 解を α，β $(\alpha\leqq\beta)$ とする．

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=k+6$，$\alpha\beta=6$

よって，$k=\alpha+\beta-6$ であり，2 解 α，β がともに整数のとき k も整数である．

また，$\alpha\beta=6$ より　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 6)$，$(2,\ 3)$，$(-3,\ -2)$，$(-6,\ -1)$ に限られる．

このときそれぞれ $k=1$，-1，-11，-13

したがって，$\boldsymbol{k=1}$ のとき　解は $\boldsymbol{x=1,\ 6}$　　$\boldsymbol{k=-1}$ のとき　解は $\boldsymbol{x=2,\ 3}$

$\boldsymbol{k=-11}$ のとき　解は $\boldsymbol{x=-3,\ -2}$　　$\boldsymbol{k=-13}$ のとき　解は $\boldsymbol{x=-6,\ -1}$

2　3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$　……①　の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．ただし，a，b は実数とする．

$x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ に　$x=1+2i$ を代入して

$(1+2i)^3-(a-1)(1+2i)^2+(b-2)(1+2i)+5=0$

$1+6i+12i^2+8i^3-(a-1)(-3+4i)+(b-2)+2(b-2)i+5=0$

$1+6i-12-8i+3(a-1)-4(a-1)i+(b+3)+(2b-4)i=0$

$(3a+b-11)+(-4a+2b-2)i=0$

a，b が実数より　$3a+b=11$，$-2a+b=1$　　したがって　$\boldsymbol{a=2,\ b=5}$

このとき①より　$x^3-x^2+3x+5=0$　　$(x+1)(x^2-2x+5)=0$　　$x=-1$，$1\pm 2i$　より

他の解は　$\boldsymbol{-1,\ 1-2i}$

【別解】　実数係数の 3 次方程式　$x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ が

$x=1+2i$ を解にもつとき，$x=1-2i$ も解にもつ．もう 1 解を α とすると

3 次方程式の解と係数の関係より

$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=a-1$　……①

$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=b-2$　……②

$(1+2i)(1-2i)\alpha=-5$　……③

③より　$5\alpha=-5$　よって　$\alpha=-1$

このとき①より　$a=\alpha+3=2$　　②より　$b=2\alpha+7=5$

したがって　$\boldsymbol{a=2,\ b=5}$　　他の解　$\boldsymbol{1-2i,\ -1}$

3　実数 x，y，z が $x+y+z=5$，$xy+yz+zx=4$，$(x+y)(y+z)(z+x)=20$ を満たすとき，$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ．

$x+y+z=5$ ……①　$xy+yz+zx=4$ ……②　$(x+y)(y+z)(z+x)=20$ ……③

①と③より　$(5-z)(5-x)(5-y)=20$

$125-25(x+y+z)+5(xy+yz+zx)-xyz=20$

これと①，②より　$125-25\cdot5+5\cdot4-xyz=20$　よって　$xyz=0$ ……④

①，②，④より　x，y，z は3次方程式　$t^3-5t^2+4t=0$　の3解である．

$t(t^2-5t+4)=0$

$t(t-1)(t-4)=0$

$t=0$，1，4

したがって，$x^3+y^3+z^3=0^3+1^3+4^3=\mathbf{65}$

第18講　三角関数(1)

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1)　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3)　$\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$　　(4)　$5\cos\theta - 2\sin^2\theta + 4 > 0$

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$

よって　$\theta - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$　　したがって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{3}{2}\pi}$

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$0 \leqq 2\theta < 4\pi$　　つまり　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{25}{6}\pi$

よって　$2\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \dfrac{15}{4}\pi$　　したがって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{24},\ \dfrac{19}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi,\ \dfrac{43}{24}\pi}$

(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$

よって　$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$　　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi}$

(4)　$5\cos\theta - 2\sin^2\theta + 4 > 0$

$5\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) + 4 > 0$

$2\cos^2\theta + 5\cos\theta + 2 > 0$

$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta + 2) > 0$

$\cos\theta < -2,\ -\dfrac{1}{2} < \cos\theta$　　したがって　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi}$

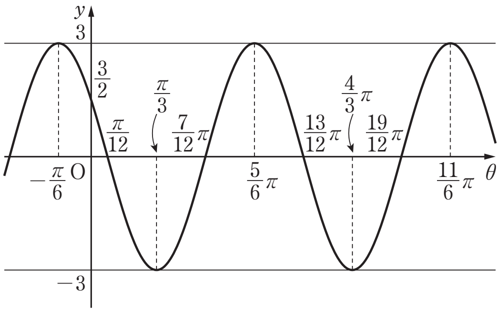
2　(1)　関数 $y = 3\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期を求めよ．また，グラフをかけ．

(2)　方程式 $\sin\left(2x - \dfrac{2}{3}\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲にもつ解の個数を求めよ．

(1)　$y = 3\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 3\cos 2\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$　　周期　$2\pi \cdot \dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\pi}$

このグラフは，$y = \cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小，y 軸方向に3倍に拡大し，θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである．

よってグラフは右図．



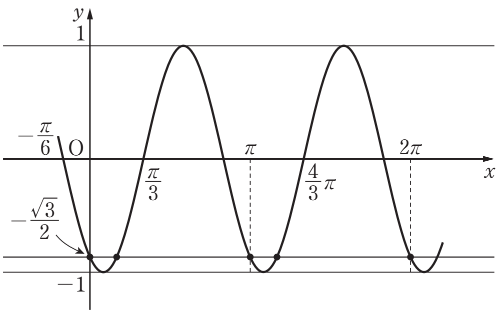
(2)　$y=\sin\left(2x-\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　（周期　π）

のグラフは右図．このグラフと直線

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の交点のうち，$0\leqq x\leqq 2\pi$

にあるものの個数が求める解の個数である．

よって　**5個**.



3　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$y=2\sin\theta-1$

(2)　$y=\sin^2\theta-2\cos\theta-1$

(1)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ より　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\theta\leqq 1$　　$\sqrt{2}\leqq 2\sin\theta\leqq 2$

よって　$-1+\sqrt{2}\leqq 2\sin\theta-1\leqq 1$　つまり　$-1+\sqrt{2}\leqq y\leqq 1$

したがって　**最大値　1**　　**最小値　$-1+\sqrt{2}$**

(2)　$y=\sin^2\theta-2\cos\theta-1$

$=1-\cos^2\theta-2\cos\theta-1$

$=-\cos^2\theta-2\cos\theta$

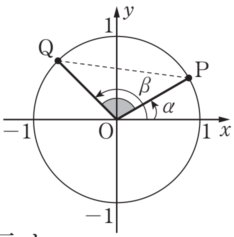
$\cos\theta=t$ とおくと，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ より　$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　つまり　$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

このとき　$y=-t^2-2t=-(t+1)^2+1$　より

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　**最大値　$\dfrac{3}{4}$**　　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　**最小値　$-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}$**

第19講　三角関数(2)

1　右図について，次の問いに答えよ．



(1)　PQ^2 を次の2通りの方法で角 α，β を用いて表せ．

(i)　点Pと点Qの座標をそれぞれ α，β で表し，2点間の距離の公式（三平方の定理）を用いる．

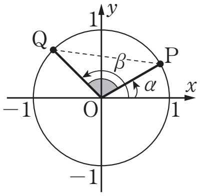
(ii)　△POQ において余弦定理を用いる．

(2)　(1)より $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ が成り立つことを示せ．

(3)　(2)で β を $-\beta$ に置き換えることにより，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ が成り立つことを示せ．

(1)　(i)　$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$ より

$$PQ^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta$$
$$=\mathbf{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}$$



(ii)　△POQ で余弦定理より

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cdot\cos\angle POQ$$
$$=1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\beta-\alpha)$$
$$=\mathbf{2-2\cos(\beta-\alpha)}$$

(2)　(1)より　$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2-2\cos(\beta-\alpha)$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

一般に $\cos(-\theta)=\cos\theta$ であるから　$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$

したがって，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(3)　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ より

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\{\alpha-(-\beta)\}=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

一般に $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

2　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき $\sin2\theta=\sin3\theta$ が成り立つことを示せ．

(2)　等式 $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示し，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ．

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき　$5\theta=\pi$　　つまり　$2\theta=\pi-3\theta$

よって　$\sin2\theta=\sin(\pi-3\theta)=\sin3\theta$　より　$\sin2\theta=\sin3\theta$

(2)　$\sin3\theta=\sin(2\theta+\theta)$

$$=\sin2\theta\cos\theta+\cos2\theta\sin\theta$$
$$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$$
$$=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta$$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

よって，$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

ここで(1)より　$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ であるから

$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき　$\sin\theta=\sin\dfrac{\pi}{5}\neq 0$ より，両辺を $\sin\theta$ で割って

$2\cos\theta=3-4\sin^2\theta$　　$2\cos\theta=3-4(1-\cos^2\theta)$

$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$　　よって　$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき　$\cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{5}>0$ より　$\boldsymbol{\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$

3 [1]　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta-3\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}+4>0$ を解け.

$\cos\theta-3\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}+4>0$

$2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1-3\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}+4>0$

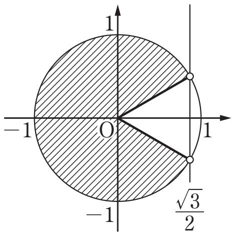
$2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-3\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}+3>0$

$\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)\left(\cos\dfrac{\theta}{2}-\sqrt{3}\right)>0$

$\cos\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{3}<\cos\dfrac{\theta}{2}$

ここで $0\leqq\theta<2\pi$ より　$0\leqq\dfrac{\theta}{2}<\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\theta}{2}<\pi$　　したがって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}<\theta<2\pi}$



3 [2]　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ のとき，次の等式が成り立つことを証明せよ.

(1)　$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　　(3)　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

(1)　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ より　$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(2)　$\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}$ より　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{1+t^2}$

よって　$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=2\cdot\dfrac{1}{1+t^2}-1=\dfrac{2-(1+t^2)}{1+t^2}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

【別解】　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　　$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$　より

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$　　つまり　$t^2=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$t^2+t^2\cos\theta=1-\cos\theta$

$(1+t^2)\cos\theta=1-t^2$　　よって　$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

(3)　(1)(2)より　$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

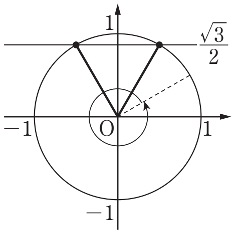
第20講　三角関数(3)

1 [1]　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，方程式 $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ を解け.

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$ となるので

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$ より　$2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$　　つまり　$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$



よって　$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

したがって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}}$

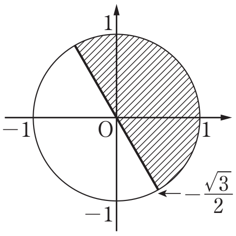
1 [2]　次の関数の最大値，最小値を求めよ.

(1)　$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin\theta\ \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$

(2)　$y = 3\sin\theta + 4\cos\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(1)　$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin\theta = -\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) = -\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$



よって　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 1$　より

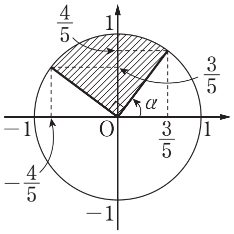
$-1 \leqq -\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　**最大値**　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$　　**最小値　−1**

(2)　$y = 3\sin\theta + 4\cos\theta = 5\left\{(\sin\theta)\cdot\dfrac{3}{5} + (\cos\theta)\cdot\dfrac{4}{5}\right\} = 5\sin(\theta + \alpha)$

ただし，$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より　$\alpha \leqq \theta + \alpha \leqq \alpha + \dfrac{\pi}{2}$



よって　$\dfrac{3}{5} \leqq \sin(\theta + \alpha) \leqq 1$　より

$3 \leqq 5\sin(\theta + \alpha) \leqq 5$

したがって　**最大値　5**　　**最小値　3**

2　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の問いに答えよ． (1)　$\sin\theta-\cos\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ． (2)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ． (3)　$y=\sin2\theta+\cos\theta-\sin\theta+1$ の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$　より　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$

よって　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$ より　$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

したがって　$\boldsymbol{-1\leqq\sin\theta-\cos\theta\leqq\sqrt{2}}$

(2)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ より

$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\sin\theta\cos\theta$

よって　$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{2}}$

(3)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと，(1)より　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

このとき　$y=\sin2\theta+\cos\theta-\sin\theta+1$

$=2\sin\theta\cos\theta-(\sin\theta-\cos\theta)+1$

$=2\cdot\dfrac{1-t^2}{2}-t+1$

$=-t^2-t+2=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

したがって　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　**最大値**　$\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$　　$t=\sqrt{2}$ のとき　**最小値**　$\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

3　$y=\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2x$　$(0\leqq x<\pi)$ の最大値，最小値を求めよ．

$y=\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2x$

$=\dfrac{1-\cos2x}{2}+2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin2x}{2}+3\cdot\dfrac{1+\cos2x}{2}$

$=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+2$

$=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2$

$0\leqq x<\pi$ より　$0\leqq2x<2\pi$　したがって　$\dfrac{\pi}{6}\leqq2x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$

よって　$-1\leqq\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$ より　$-2\leqq2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq2$

したがって　$0\leqq2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\leqq4$

ゆえに　**最大値　4**　　**最小値　0**

第21講　図形と方程式(1)

1　2直線 $ax+y+1=0$ ……①，$x+ay-1=0$ ……②　について，次の問いに答えよ．

(1)　①と②が垂直に交わるときの a の値を求めよ．

(2)　①と②が交点をもたないときの a の値を求めよ．

(1)　①と②が垂直に交わるとき

$a\cdot1+1\cdot a=0$　　よって　$\boldsymbol{a=0}$

(2)　①と②が平行になるのは

$a\cdot a-1\cdot1=0$　　$a^2=1$　　よって　$a=\pm1$ のときである．

$a=-1$ のとき　①より　$-x+y+1=0$　　②より　$x-y-1=0$

よって①と②が一致するので不適．

$a=1$ のとき　①より　$x+y+1=0$　　②より　$x+y-1=0$

よって①と②は平行かつ一致せず，交点をもたない．

以上より　$\boldsymbol{a=1}$

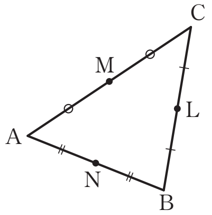
2　△ABC で，辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L(4，−1), M(−1，1), N(−2，−5) とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ．

(2)　直線 AB の方程式，および点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ．また，△ABC の面積を求めよ．

(3)　△ABC の外心の座標を求めよ．

(1)　A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ とすると，条件より



$$\frac{x_1+x_2}{2}=-2,\quad \frac{x_2+x_3}{2}=4,\quad \frac{x_3+x_1}{2}=-1$$

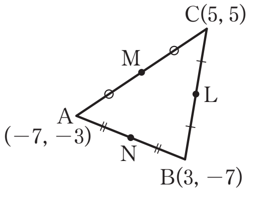
よって　$x_1+x_2=-4,\ x_2+x_3=8,\ x_3+x_1=-2$

これらより　$x_1=-7,\ x_2=3,\ x_3=5$

同様に　$\dfrac{y_1+y_2}{2}=-5,\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=-1,\ \dfrac{y_3+y_1}{2}=1$ より　$y_1=-3,\ y_2=-7,\ y_3=5$

したがって　**A(−7，−3)，B(3，−7)，C(5，5)**

(2)　直線 AB の傾きは　$\dfrac{-4}{10}=-\dfrac{2}{5}$



よって直線 AB の方程式は　$y=-\dfrac{2}{5}(x+7)-3$

つまり　$\boldsymbol{y=-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{29}{5}}$

点 C(5，5) から直線 AB：$2x+5y+29=0$ に下ろした垂線の長さ d は

$$d=\frac{|2\cdot5+5\cdot5+29|}{\sqrt{4+25}}=\frac{\boldsymbol{64}}{\boldsymbol{\sqrt{29}}}$$

また，$AB=\sqrt{10^2+4^2}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$

よって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{29}\cdot\dfrac{64}{\sqrt{29}}=\mathbf{64}$

(3)　求める外心は，線分 AB，線分 BC のそれぞれの垂直二等分線の交点である．
線分 AB の垂直二等分線は，線分 AB の中点 N を通り，AB に垂直な直線である．

その方程式は　$y=\dfrac{5}{2}(x+2)-5$　つまり　$y=\dfrac{5}{2}x$　……①

また，線分 BC の垂直二等分線は，線分 BC の中点 L を通り，BC に垂直な直線である．

その方程式は　$y=-\dfrac{1}{6}(x-4)-1$　つまり　$y=-\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{3}$　……②

よって求める外心の座標は，①と②の交点の座標　$\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{8},\ -\dfrac{5}{16}}\right)$　である．

3　直線 $l : y=2x-3$ と点 A(5, 2) がある．次の問いに答えよ．
(1)　直線 l に関して，点 A と対称な点 B の座標を求めよ．
(2)　点 P が直線 l 上を動くとき，AP の長さの最小値を求めよ．また，点 C(6, 6) に対して，AP＋PC の値が最小となる点 P の座標を求めよ．

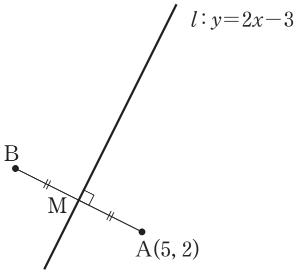
(1)　点 B の座標を $(a,\ b)$ とする．

直線 l と直線 AB が垂直であることより　$2\cdot\dfrac{b-2}{a-5}=-1$

つまり　$a+2b=9$　……①

線分 AB の中点 $M\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)$ が直線 l 上にあることより

$\dfrac{b+2}{2}=2\cdot\dfrac{a+5}{2}-3$　つまり　$2a-b=-2$　……②



①，②より　$a=1,\ b=4$　　したがって　**B(1, 4)**

(2)　AP が最小となるのは，$AP\perp l$ となるときで，このとき
P は(1)より点 M(3, 3) と一致する．
よって求める AP の最小値は　$AM=\sqrt{4+1}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$
　また C(6, 6) に対して AP＋PC＝BP＋PC より，
AP＋PC　すなわち　BP＋PC の値が最小となるのは 3 点 B，P，C が一直線上にあるときである．

直線 BC の方程式は　$y=\dfrac{2}{5}(x-1)+4$　つまり　$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{18}{5}$

これと直線 l の交点が求める点 P である．

したがって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{33}{8},\ \dfrac{21}{4}}\right)$

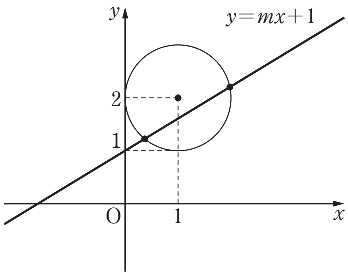
第22講　図形と方程式(2)

1　点 $(1,\ 2)$ を中心とする半径1の円 C と直線 l : $y=mx+1$ がある．次の問いに答えよ．

(1)　直線 l が円 C と共有点をもつような m の値の範囲を求めよ．

(2)　直線 l が円 C によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，m の値を求めよ．

C : $(x-1)^2+(y-2)^2=1$　　l : $y=mx+1$



(1)　円 C の中心 $(1,\ 2)$ と直線 l : $mx-y+1=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|m-2+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

条件より　$d\leqq$(円 C の半径) であればよい．

よって　$\dfrac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\leqq 1$　　$|m-1|\leqq\sqrt{m^2+1}$

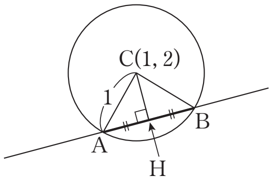
両辺を2乗して　$(m-1)^2\leqq m^2+1$　　$-2m\leqq 0$　　よって　$\boldsymbol{m\geqq 0}$

【別解】　図より，点 $(0,\ 1)$ を通る直線 l が円 C と共有点をもつのは，

$0\leqq$(l の傾き)　のときである．

よって　$\boldsymbol{0\leqq m}$

(2)　円 C の中心をCとし，C$(1,\ 2)$ から直線 l に下ろした垂線をCHとすると，(1)より　$\mathrm{CH}=d$



また，直線 l と円 C の2つの交点をA，Bとすると，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$

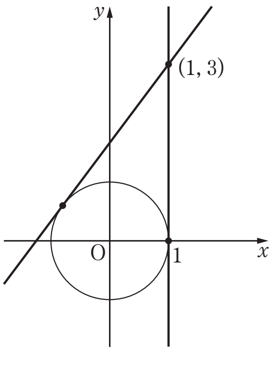
$\mathrm{CH}^2=\mathrm{CA}^2-\mathrm{AH}^2$ より　$d^2=1^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\dfrac{(m-1)^2}{m^2+1}=\dfrac{1}{2}$　　$m^2-4m+1=0$　　よって　$\boldsymbol{m=2\pm\sqrt{3}}$

2　(1)　点 $(1,\ 3)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ．

(2)　円 $(x-1)^2+y^2=5$ と，中心 $(a,\ b)$ で半径1の円の2つの共有点を通る直線の方程式が $x-y+2=0$ である．このとき，$(a,\ b)$ を求めよ．

(1)　図より，求める接線の1つは直線 $x=1$ である．



y 軸と平行でないもう1本の接線を　$y=m(x-1)+3$　とおくと，円の中心 $(0,\ 0)$ とこの直線　$mx-y-m+3=0$　の距離が円の半径1と等しければよい．

よって　$\dfrac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=1$　　$(m-3)^2=m^2+1$　　$m=\dfrac{4}{3}$

ゆえに，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{x=1,\ y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}}$

(2)　題意より，円 $(x-1)^2+y^2=5$ ……①　と直線 $x-y+2=0$ ……②　の2つの共有点を中心 $(a,\ b)$，半径1の円が通る．

①，②の共有点を通る図形の方程式は

$$(x-1)^2+y^2-5+k(x-y+2)=0$$

$$x^2+(k-2)x+y^2-ky+2k-4=0$$

$$\left(x+\frac{k-2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{k}{2}\right)^2=\frac{1}{2}k^2-3k+5 \quad \cdots\cdots③$$

③が半径1の円を表すのは　$\frac{1}{2}k^2-3k+5=1^2$

$k^2-6k+8=0$　　$(k-2)(k-4)=0$　　よって　$k=2,\ 4$

このとき円③の中心の座標は　$\left(-\frac{k-2}{2},\ \frac{k}{2}\right)$

$k=2$ のとき　円の中心は $(0,\ 1)$　　$k=4$ のとき　円の中心は $(-1,\ 2)$

したがって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(0,\ 1),\ (-1,\ 2)}$

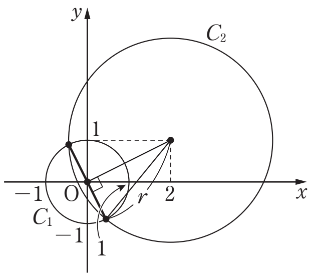
3　2円 $C_1:x^2+y^2=1$，$C_2:(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$ $(r>0)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　2円が異なる2交点をもつときの r の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)のとき，2円の共通弦の長さが最大となるときの r の値と，そのときの共通弦の長さを求めよ．

円 C_1 の中心は $(0,\ 0)$，半径は1　　円 C_2 の中心は $(2,\ 1)$，半径は r

中心間の距離は $\sqrt{5}$



(1)　2円が異なる2交点をもつのは　$r-1<\sqrt{5}<r+1$　のとき

よって　$\boldsymbol{-1+\sqrt{5}<r<1+\sqrt{5}}$

(2)　2円が異なる2交点をもつとき，2円の共通弦の長さが最大になるのは図より共通弦が円 C_1 の直径となるときである．

したがって，共通弦の長さの最大値は　**2**

また，このときの半径 r は三平方の定理により　$r^2=1^2+\sqrt{5}^2$　　よって　$\boldsymbol{r=\sqrt{6}}$

【別解】　2円の異なる2交点を通る直線は

$$x^2+y^2-1-\{(x-2)^2+(y-1)^2-r^2\}=0$$

つまり　$4x+2y+r^2-6=0$ ……①

である．①が円 C_1 の中心 $(0,\ 0)$ を通るときに2円の共通弦の長さが最大となる．

したがって　$r^2-6=0$　　$r>0$ より　$\boldsymbol{r=\sqrt{6}}$

このとき，①は $2x+y=0$　これと円 C_2 の中心 $(2,\ 1)$ との距離は　$\frac{|4+1|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$

ゆえに共通弦の長さの最大値は　$2\sqrt{\sqrt{6}^2-\sqrt{5}^2}=\boldsymbol{2}$

第23講　図形と方程式(3)

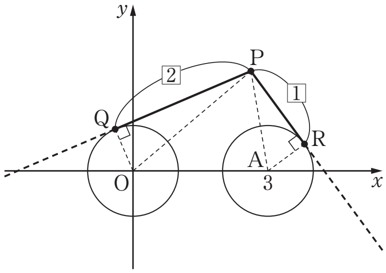
1 (1)　点Pから2円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$ に引いた接線の長さの比が2：1であるという．点Pの軌跡を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2+(4-4a)x+4a-4$ の頂点をPとする．$0<a\leqq 2$ のとき，頂点Pの描く軌跡を求めよ．

(1)　円 $x^2+y^2=1$　……①　の中心をOとすると，O(0，0)　半径は1

円 $(x-3)^2+y^2=1$　……②　の中心をAとすると，A(3，0)　半径は1

点Pの座標を $(X,\ Y)$ とする．



点Pから円①に引いた接線とこの円との接点をQとすると　$PQ^2=OP^2-OQ^2=X^2+Y^2-1$

点Pから円②に引いた接線とこの円との接点をRとすると　$PR^2=AP^2-AR^2=(X-3)^2+Y^2-1$

条件より　PQ：PR＝2：1　　2PR＝PQ

両辺2乗して　$4PR^2=PQ^2$

よって　$4\{(X-3)^2+Y^2-1\}=X^2+Y^2-1$

$3X^2-24X+3Y^2+33=0$

$X^2-8X+Y^2+11=0$　　$(X-4)^2+Y^2=5$

したがって求める軌跡は　**中心 (4，0)，半径 $\sqrt{5}$ の円**

(2)　$y=x^2+(4-4a)x+4a-4=\{x-(2a-2)\}^2-4a^2+12a-8$

頂点Pの座標は　$(2a-2,\ -4a^2+12a-8)$

頂点Pの座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=2a-2$　……①　　$Y=-4a^2+12a-8$　……②

①より　$a=\dfrac{X+2}{2}$　　これを②に代入して　$Y=-4\left(\dfrac{X+2}{2}\right)^2+12\cdot\dfrac{X+2}{2}-8$

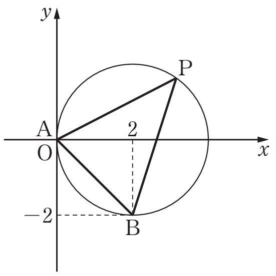
つまり　$Y=-X^2+2X$

また，$0<a\leqq 2$ より　$0<\dfrac{X+2}{2}\leqq 2$　つまり　$-2<X\leqq 2$

したがって求める軌跡は，**放物線 $y=-x^2+2x$ の $-2<x\leqq 2$ の部分**．

2　点Pが円 $x^2+y^2-4x=0$ 上を動くとき，3点A(0，0)，B(2，−2)，Pを頂点とする三角形ABPの重心Gの軌跡を求めよ．

$P(s,\ t)$ とおくと，△ABPの重心Gの座標は　$\left(\dfrac{0+2+s}{3},\ \dfrac{0-2+t}{3}\right)$



$G(X,\ Y)$ とおくと，$X=\dfrac{2+s}{3}$，$Y=\dfrac{-2+t}{3}$

したがって　$s=3X-2$，$t=3Y+2$

$P(s,\ t)$ は円 $x^2+y^2-4x=0$ 上の点であることより

$s^2+t^2-4s=0$

よって　$(3X-2)^2+(3Y+2)^2-4(3X-2)=0$

$9X^2+9Y^2-24X+12Y+16=0$

$X^2+Y^2-\dfrac{8}{3}X+\dfrac{4}{3}Y+\dfrac{16}{9}=0$　　$\left(X-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(Y+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

ここで，$P(s,\ t)=(0,\ 0)$，$(2,\ -2)$ のときはそれぞれ P と A，P と B が一致し，三角形ができないため不適.

よって　$(s,\ t)\neq(0,\ 0)$，$(2,\ -2)$　　つまり　$(X,\ Y)\neq\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$

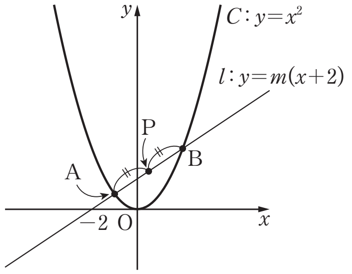
したがって求める軌跡は

中心 $\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2}{3}$ の円．ただし，2点 $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{3}\right)$ を除く．

3　放物線 $C：y=x^2$ と直線 $l：y=m(x+2)$ について，次の問いに答えよ.

(1)　C と l が異なる 2 点 A，B で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ.

(2)　(1)のとき，線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ.



(1)　$y=x^2$ と $y=m(x+2)$ より

$x^2=m(x+2)$　　$x^2-mx-2m=0$　……①

C と l が異なる 2 点で交わるのは，①の判別式を D とすると

$D=m^2+8m>0$　　$m(m+8)>0$

よって　**$m<-8$，$0<m$**

(2)　(1)のとき 2 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，

α，β は①の異なる 2 解.

よって解と係数の関係により　$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=-2m$

$P(X,\ Y)$ とすると，P は線分 AB の中点であることより

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{m}{2}$　……②　　$Y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\dfrac{m^2+4m}{2}$　……③

②より $m=2X$　　これを③に代入して　$Y=\dfrac{(2X)^2+4\cdot 2X}{2}=2X^2+4X$

また(1)より　$m<-8$，$0<m$　よって　$2X<-8$，$0<2X$　つまり　$X<-4$，$0<X$

したがって求める軌跡は　**放物線 $y=2x^2+4x$ の $x<-4$，$0<x$ の部分**.

第24講　図形と方程式(4)

1　$|x|+|y|\leqq 1$ ならば $(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$ が成り立つことを証明せよ．

不等式　$|x|+|y|\leqq 1$，$(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$　の表す領域をそれぞれＰ，Ｑとする．

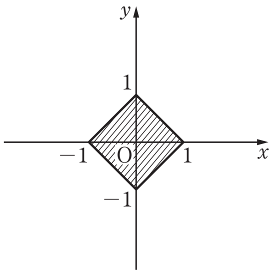
領域Ｐについて

　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき　$x+y\leqq 1$　つまり　$y\leqq -x+1$

　$x\geqq 0$，$y<0$ のとき　$x-y\leqq 1$　つまり　$y\geqq x-1$

　$x<0$，$y\geqq 0$ のとき　$-x+y\leqq 1$　つまり　$y\leqq x+1$

　$x<0$，$y<0$ のとき　$-x-y\leqq 1$　つまり　$y\geqq -x-1$



よって領域Ｐは右図斜線部分．ただし，境界を含む．

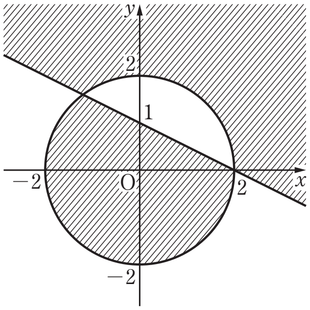
領域Ｑは

　$x+2y-2\geqq 0$　かつ　$x^2+y^2-4\geqq 0$　……①

　　または　$x+2y-2\leqq 0$　かつ　$x^2+y^2-4\leqq 0$　……②　の表す領域である．

　①より　$y\geqq -\dfrac{1}{2}x+1$　かつ　$x^2+y^2\geqq 4$

　②より　$y\leqq -\dfrac{1}{2}x+1$　かつ　$x^2+y^2\leqq 4$



よって領域Ｑは右図斜線部分．ただし，境界を含む．

したがって　$P\subset Q$ が成り立つので，

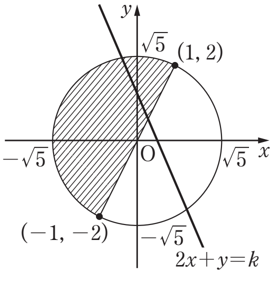
$|x|+|y|\leqq 1$　ならば　$(x+2y-2)(x^2+y^2-4)\geqq 0$　が成り立つ．

2　実数 x，y が $x^2+y^2\leqq 5$，$y\geqq 2x$ を満たすとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x$ の交点は　$(1,\ 2)$，$(-1,\ -2)$

よって　$x^2+y^2\leqq 5$，$y\geqq 2x$ の満たす領域 D は

右図斜線部分．境界を含む．



$2x+y=k$　……①　とおくと，$y=-2x+k$

これは傾き -2，y 切片 k の直線を表す．

この直線①が領域 D と共有点をもつときの y 切片 k の最大値，最小値を求める．

k が最大となるのは，直線①が点 $(1,\ 2)$ を通るとき．

　このとき　$k=2\cdot 1+2=4$

k が最小となるのは，直線①が円 $x^2+y^2=5$ と第3象限で接するとき．

　直線①と円の中心 $(0,\ 0)$ の距離が半径 $\sqrt{5}$ と等しくなるときを考えて

$$\frac{|-k|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}\qquad |k|=5\qquad \text{よって}\quad k=\pm 5$$

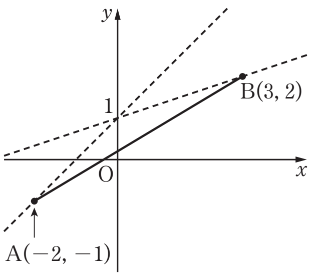
　第3象限で接するとき　$k<0$　したがって　$k=-5$

このとき直線①と円の接点の座標は，①：$y=-2x-5$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ の交点であるので，

$(-2,\ -1)$　これは領域 D に含まれる．
以上より　**最大値　4　　最小値　−5**

> **3**　(1)　2 点を $A(-2,\ -1)$，$B(3,\ 2)$ とする．線分 AB が直線 $y=ax+1$ と共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ．
> (2)　放物線 $y=-x^2+x+2$ 上の任意の点を P，直線 $y=-2x+6$ 上の任意の点を Q とする．このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

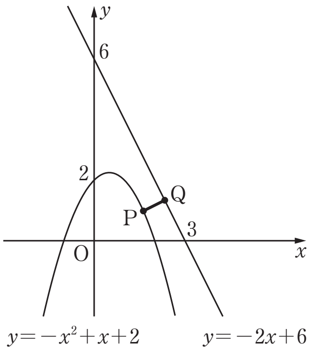
(1)　直線 $y=ax+1$ が
点 $A(-2,\ -1)$ を通るとき　$a=1$
点 $B(3,\ 2)$ を通るとき　$a=\dfrac{1}{3}$



よって，グラフより　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}<a<1}$

【別解】　$f(x,\ y)=ax-y+1$ とおくと，2 点 A，B が
ともに $f(x,\ y)>0$ の領域にあるか，ともに $f(x,\ y)<0$ の領域にあればよい．
つまり　$f(-2,\ -1)\times f(3,\ 2)>0$
$(-2a+1+1)(3a-2+1)>0$
$(a-1)(3a-1)<0$　　よって　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}<a<1}$

(2)　点 P の座標は $(t,\ -t^2+t+2)$ と表せる．
求める線分 PQ の距離の最小値は，点 P と
直線 $y=-2x+6$　つまり　$2x+y-6=0$ の距離 d の
最小値である．



$$d=\frac{|2t-t^2+t+2-6|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-t^2+3t-4|}{\sqrt{5}}$$

ここで図より $P(t,\ -t^2+t+2)$ は領域　$y<-2x+6$
つまり　$2x+y-6<0$ にある．
したがって，$2t-t^2+t+2-6<0$　つまり　$-t^2+3t-4<0$

よって　$d=\dfrac{t^2-3t+4}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7\sqrt{5}}{20}$

したがって，求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{5}}{20}}$　である．

練習問題解答

第1講　数と式・方程式・不等式

(1)　$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$ を因数分解すると

$(x-$ ア $y+$ イ $)(x+$ ウ $y-$ エ $)$ となる.

(2)　$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, $y=5+\sqrt{24}$ のとき, $x^2+y^2=$ オカ , $x^3+y^3=$ キクケ である.

(3)　x についての不等式 $2x+4a>3x+a$ を満たす自然数の個数が 2 個となるような整数 a は $a=$ コ である.

(1)　$$\begin{aligned}x^2+xy-6y^2+x+13y-6&=x^2+(y+1)x-6y^2+13y-6\\&=x^2+(y+1)x-(6y^2-13y+6)\\&=x^2+(y+1)x-(2y-3)(3y-2)\\&=\{x+(-2y+3)\}\{x+(3y-2)\}\\&=(x-\mathbf{2}y+\mathbf{3})(x+\mathbf{3}y-\mathbf{2})\end{aligned}$$

(2)　$x=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=5-\sqrt{24}=5-2\sqrt{6}$, $y=5+\sqrt{24}=5+2\sqrt{6}$

$x+y=10$, $xy=(5-\sqrt{24})(5+\sqrt{24})=25-24=1$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\cdot1=\mathbf{98}$

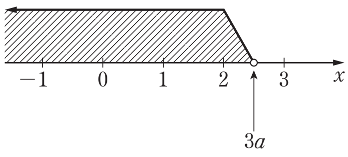
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=10^3-3\cdot1\cdot10=\mathbf{970}$

(3)　$2x+4a>3x+a$ より

$-x>-3a$

$x<3a$

これを満たす自然数 x の個数が 2 個であるとき,
その自然数は 1 と 2 のみである.



よって　$2<3a\leqq3$　つまり　$\dfrac{2}{3}<a\leqq1$　であればよい.

これを満たす整数 a は　$a=\mathbf{1}$　のみである.

第２講　２次関数(1)

(1)　放物線 $y=x^2-2x+3$ の頂点の座標は（ ア ， イ ）であり，この放物線のグラフを x 軸方向に ウ ，y 軸方向に エ 平行移動すると放物線 $y=x^2-6x+14$ のグラフと重なる．

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 4 平行移動し，さらに原点に関して対称に移動すると，放物線 $y=-x^2-6x-11$ となるとき，$a=$ オ ，$b=$ カ ，$c=$ キ である．

(1)　$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$　……①　より，①のグラフの頂点の座標は (**1**，**2**) である．
また $y=x^2-6x+14=(x-3)^2+5$　……②　より，②のグラフの頂点の座標は (3，5) である．
よって，①のグラフを x 軸方向に **2**，y 軸方向に **3** 平行移動すると②のグラフに重なる．

(2)　題意より
$y=-x^2-6x-11$ のグラフを原点に関して対称移動し，さらに x 軸方向に -4 平行移動すると放物線 $y=ax^2+bx+c$ となる．
$y=-x^2-6x-11=-(x+3)^2-2$ より，頂点の座標は $(-3，-2)$
このグラフを原点に関して対称移動すると，頂点は (3，2) に移動し，
凸の方向が逆となる．
さらに x 軸方向に -4 平行移動すると，頂点は $(-1，2)$ に移動する．
よって，移動後の方程式は　$y=(x+1)^2+2=x^2+2x+3$ である．
したがって，$a=$**1**，$b=$**2**，$c=$**3**　である．

第3講　2次関数(2)

2次関数 $y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$ のグラフの頂点の座標を a を用いて表すと，

$(a+$ ア $,\ -$ イ a^2+ ウ $a-$ エ $)$ である．この関数の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は

$a<-$ オ のとき　カキ $a+$ ク

$-$ オ $\leqq a\leqq$ ケ のとき　$-$ イ a^2+ ウ $a-$ エ

ケ $<a$ のとき　コサ $a+$ シ

である．

$f(x)=2x^2-4(a+1)x+10a+1=2\{x-(a+1)\}^2-2a^2+6a-1$　とおくと，

$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は $(a+\mathbf{1},\ -\mathbf{2}a^2+\mathbf{6}a-\mathbf{1})$ である．

したがって，この関数の $-1\leqq x\leqq 3$ における最小値は

$a+1<-1$　つまり　$a<-\mathbf{2}$　のとき，最小値　$f(-1)=\mathbf{14}a+\mathbf{7}$

$-1\leqq a+1\leqq 3$　つまり　$-\mathbf{2}\leqq a\leqq \mathbf{2}$　のとき，最小値　$f(a+1)=-\mathbf{2}a^2+\mathbf{6}a-\mathbf{1}$

$3<a+1$　つまり　$\mathbf{2}<a$　のとき，最小値　$f(3)=-\mathbf{2}a+\mathbf{7}$

である．

第４講　２次関数(3)

放物線 $y=ax^2+4x+5-a$ ……① のグラフと x 軸との共有点について調べる．
２次方程式 $ax^2+4x+5-a=0$ の判別式を D とすると，
$\dfrac{D}{4}=a^2-$ ア $a+$ イ である．よって，①のグラフが x 軸と２点で交わるのは，
$a<0$，$0<a<$ ウ ，エ $<a$ のときである．また，①のグラフが x 軸と接するのは $a=$ ウ ，エ のときであり，このときの接点の座標は，$a=$ ウ のとき
$(-$ オ $,\ 0)$，$a=$ エ のとき $\left(-\dfrac{カ}{キ},\ 0\right)$ である．

$ax^2+4x+5-a=0$ ……② の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-\mathbf{5}a+\mathbf{4}=(a-1)(a-4)$ である．

よって，①のグラフが x 軸と２点で交わるのは　$D>0$　つまり

$(a-1)(a-4)>0$　より　$a<1,\ 4<a$　のとき．

①は放物線であるので $a\neq 0$

したがって　$a<0,\ 0<a<\mathbf{1},\ \mathbf{4}<a$　のときである．

また，①のグラフが x 軸と接するのは　$D=0$　つまり

$(a-1)(a-4)=0$　よって　$a=\mathbf{1},\ \mathbf{4}$　のときである．

①が x 軸と接するとき，その接点の x 座標は②がもつ重解である．

②が重解をもつとき，その解は $x=-\dfrac{2}{a}$ である．

よって　$a=\mathbf{1}$　のとき　接点の座標は　$(\mathbf{-2},\ \mathbf{0})$

$a=\mathbf{4}$　のとき　接点の座標は　$\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ 0\right)$　である．

第５講　２次関数(4)

2 次方程式 $x^2+ax+2a=0$ が $-1<x<1$ に少なくとも 1 解をもつときの a の値の範囲を求めたい．$f(x)=x^2+ax+2a$ とおくと，$f(x)$ のグラフの軸は直線 $x=-\dfrac{a}{\boxed{ア}}$ である．また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると $D=a(a-\boxed{イ})$ である．さらに $f(-1)=a+\boxed{ウ}$，$f(1)=\boxed{エ}a+1$ である．$f(x)=0$ が $-1<x<1$ に 2 つの解（重解を含む）をもつのは $-\dfrac{1}{\boxed{オ}}<a\leqq\boxed{カ}$ のときである．また，$-1<x<1$ の範囲に 1 解のみもち，もう 1 解は $x<-1$ または $1<x$ の範囲にあるのは $-\boxed{キ}<a<-\dfrac{1}{\boxed{オ}}$ のときである．さらに，$x=1$ を解にもつとき $a=-\dfrac{1}{\boxed{オ}}$ であり，このときもう 1 解は $x=-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．$x=-1$ を解にもつとき $a=-\boxed{キ}$ であり，このときもう 1 解は $x=\boxed{コ}$ である．以上より，求める a の範囲は $-\boxed{キ}<a\leqq\boxed{カ}$ となる．

$f(x)=x^2+ax+2a$ のグラフの軸は $x=-\dfrac{a}{\mathbf{2}}$，$f(x)=0$ の判別式 D について

$D=a^2-8a=a(a-\mathbf{8})$　　さらに　$f(-1)=a+\mathbf{1}$，$f(1)=\mathbf{3}a+1$　である．

$f(x)=0$ が $-1<x<1$ に 2 つの解をもつのは $f(-1)>0$，$f(1)>0$，$-1<-\dfrac{a}{2}<1$，$D\geqq0$

　つまり　$a>-1$　かつ　$a>-\dfrac{1}{3}$　かつ　$-2<a<2$　かつ　$a\leqq0,\ 8\leqq a$

　したがって　$-\dfrac{1}{\mathbf{3}}<a\leqq\mathbf{0}$　のとき．

$-1<x<1$ の範囲に 1 解のみもち，もう 1 解は $x<-1$ または $1<x$　の範囲にあるのは

　$f(-1)\cdot f(1)<0$　より　$(a+1)(3a+1)<0$　つまり　$-\mathbf{1}<a<-\dfrac{1}{\mathbf{3}}$　のとき．

$x=1$ を解にもつとき，$f(1)=0$ より　$a=-\dfrac{1}{\mathbf{3}}$

　このとき $f(x)=(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=0$ より　もう 1 解は　$x=-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

　これは　$-1<x<1$　の範囲にあり，適する．

$x=-1$ を解にもつとき，$f(-1)=0$ より　$a=-\mathbf{1}$

　このとき　$f(x)=(x+1)(x-2)=0$ より　もう 1 解は　$x=\mathbf{2}$

　これは　$-1<x<1$　の範囲になく，不適．

以上より，求める a の範囲は

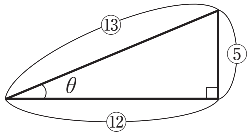
　$-1<a<-\dfrac{1}{3}$，$a=-\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{3}<a\leqq0$　より　$-\mathbf{1}<a\leqq\mathbf{0}$　である．

第６講　三角比(1)

(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$，$\tan\theta=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

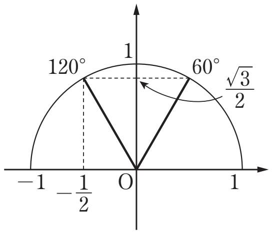
(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は $\theta=\boxed{\text{キク}}^\circ$，$\boxed{\text{ケコサ}}^\circ$ である．また，$\theta=\boxed{\text{ケコサ}}^\circ$ のとき $\cos\theta$ の値は $-\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で $\cos\theta=\dfrac{12}{13}>0$ より θ は鋭角である．



よって右図より　$\sin\theta=\mathbf{\dfrac{5}{13}}$，$\tan\theta=\mathbf{\dfrac{5}{12}}$

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき



$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\theta=\mathbf{60^\circ}$，$\mathbf{120^\circ}$

また $\theta=\mathbf{120^\circ}$ のとき

$\cos\theta=\cos 120^\circ=-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

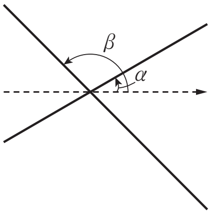
第７講　三角比(2)

(1)　2 直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$ と $y=-x-3$ のなす鋭角は [アイ] $^\circ$ である.

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする. $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき $\sin\theta=\dfrac{[ウ]}{\sqrt{[エオ]}}$,

$\cos\theta=-\dfrac{[カ]}{\sqrt{[キク]}}$ である.

(1)　2 直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+1$, $y=-x-3$ が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α, β とすると,



$\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\alpha=30^\circ$,

$\tan\beta=-1$ より　$\beta=135^\circ$

$\beta-\alpha=105^\circ$　よって　求める鋭角は　**75°**

(2)　$\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$$

$$\cos^2\theta=\frac{9}{10}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において $\tan\theta<0$ より, θ は鈍角.

よって　$\cos\theta=-\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

このとき　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

第8講　三角比と平面図形(1)

円Oに内接する四角形ABCDにおいて，BC＝8，CD＝5，DA＝3，∠BCD＝60°である．このとき，BD＝［ア］，AB＝［イ］，円Oの半径は $\dfrac{[ウ]\sqrt{[エ]}}{[オ]}$ である．

また△ABDの内接円の半径を r とすると，$r=\dfrac{\sqrt{[カ]}}{[キ]}$ である．

△BCDで余弦定理より

$$BD^2=64+25-2\cdot8\cdot5\cdot\cos60°=64+25-40=49$$

したがって　BD＝**7**

∠BAD＝180°−∠BCD＝120°

AB＝x とおくと，△ABDで余弦定理より

$$49=9+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\cos120°$$

$$x^2+3x-40=0$$

$$(x+8)(x-5)=0 \qquad x=-8,\ 5$$

よって　AB＝**5**

円Oの半径を R とすると，△BCDで正弦定理より

$$2R=\frac{7}{\sin60°}$$

よって　$R=\dfrac{7}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$

△ABDの面積を S とすると　$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120°=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

また，△ABDの内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(AB+BD+DA)$$

よって　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}r(5+7+3)$

したがって　$r=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

第9講　三角比と平面図形(2)

△ABC において，AB＝15，AC＝10，∠A＝60° とすると，BC＝$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ である．∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると BD＝$\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$，AD＝$\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である．また $\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{キ}}{\sqrt{\boxed{ク}}}$ であることより，辺 BC の中点を E とすると $AE=\dfrac{\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$ である．

△ABC について余弦定理より

$$BC^2=225+100-2\cdot15\cdot10\cdot\cos60^\circ=175$$

よって　BC＝$\mathbf{5\sqrt{7}}$

角の二等分線の性質より　BD：DC＝AB：AC＝3：2

よって　$BD=\dfrac{3}{5}BC=\mathbf{3\sqrt{7}}$

また，△ABC＝△ABD＋△ACD　より

$$\frac{1}{2}\cdot15\cdot10\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot15\cdot AD\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot10\cdot AD\cdot\sin30^\circ$$

$$30\sqrt{3}=5AD$$

よって　AD＝$\mathbf{6\sqrt{3}}$

△ABC について余弦定理より

$$\cos\angle ABC=\frac{225+175-100}{2\cdot15\cdot5\sqrt{7}}=\frac{12}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{\sqrt{7}}}$$

また，$BE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$ であり，AE＝x とおくと，△ABE について余弦定理より

$$x^2=15^2+\left(\frac{5\sqrt{7}}{2}\right)^2-2\cdot15\cdot\frac{5\sqrt{7}}{2}\cdot\cos\angle ABC=\frac{900}{4}+\frac{175}{4}-\frac{600}{4}=\frac{475}{4}$$

したがって　$x=AE=\dfrac{\mathbf{5\sqrt{19}}}{\mathbf{2}}$

第 10 講　集合・場合の数(1)

144 の正の約数全体の集合を A，216 の正の約数全体の集合を B とする．集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよう．$144=2^{\boxed{ア}}\times3^{\boxed{イ}}$ より $n(A)=\boxed{ウエ}$ である．$n(B)$ も同様に求められる．また，$A\cap B$，すなわち 144 と 216 の正の公約数の集合は，その最大公約数の約数全体の集合である．144 と 216 の最大公約数は $2^{\boxed{オ}}\times3^{\boxed{カ}}$ であることより，$n(A\cap B)$ を求めることができる．したがって，個数定理により $n(A\cup B)=\boxed{キク}$ である．また，A の要素の和は $\boxed{ケコサ}$ である．

$144=2^4\times3^2$ より　$n(A)=5\times3=\mathbf{15}$

$216=2^3\times3^3$ より　$n(B)=4\times4=16$

また，144 と 216 の最大公約数は　$2^3\times3^2$ であることより

$n(A\cap B)=4\times3=12$

よって個数定理　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$　より

$n(A\cup B)=15+16-12=\mathbf{19}$　である．

また，A の要素の和は

$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)=31\times13=\mathbf{403}$

第11講　場合の数(2)

(1)　7個の数字1，2，3，4，5，6，7から相異なる5個の数字を取ってつくる5桁の数のうち，25で割り切れるものは **アイウ** 個ある．

(2)　0，1，1，1，2，2，3の7個の数字からつくることができる7桁の整数は **エオカ** 個ある．

(3)　男子5人，女子5人が丸テーブルに着席するとき，男女が交互になる着席の仕方は **キクケコ** 通りある．

(1)　1，2，3，4，5，6，7の数字でつくる5桁の数のうち25で割りきれる数は，下2桁が25または75のとき．いずれの場合も，残りの3桁の決め方が　${}_5\mathrm{P}_3$ 通り．
よって，求める総数は　$2\times{}_5\mathrm{P}_3=2\times5\cdot4\cdot3=\mathbf{120}$（個）

(2)　先頭の位が1のとき

残り6桁は0，1，1，2，2，3の順列で　$\dfrac{6!}{2!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot2}=180$（通り）

先頭の位が2のとき，残り6桁は0，1，1，1，2，3の順列で

$\dfrac{6!}{3!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120$（通り）

先頭の位が3のとき

残り6桁は0，1，1，1，2，2の順列で　$\dfrac{6!}{3!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot2}=60$（通り）

したがって，求める総数は　$180+120+60=\mathbf{360}$（個）

【別解】　7つの数字の総順列は　$\dfrac{7!}{3!2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot2}=420$（通り）

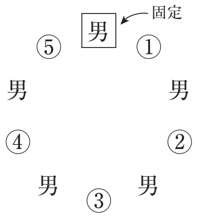
このうち，先頭が0になるものは残りの6つの数字の総順列で

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$（通り）

よって，求める総数は　$420-60=\mathbf{360}$（個）

(3)　男子5人を円形に並べる方法が　4! 通り
女子は右図①～⑤に1人ずつ座る方法で　5! 通り
したがって，求める総数は

$4!\times5!=24\times120=\mathbf{2880}$（通り）



第12講　場合の数(3)

(1)　男子5人，女子5人からなるグループから3人を選ぶ方法は **アイウ** 通りある．このうち，女子を少なくとも1人含む選び方は **エオカ** 通りある．

(2)　A，B，C，D 4つの学級の生徒から合計7人の委員を選びたい．各学級から選ぶ人数の決め方の総数は，選ばれない学級があってもよいとき **キクケ** 通りあるが，どの学級からも少なくとも1人は選ぶこととしたとき，人数の決め方は **コサ** 通りある．

(1)　10人から3人選ぶ方法は　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{120}$（通り）

このうち，女子を少なくとも1人含むときについて

女子を1人のみ含むとき，選ばれる女子が　${}_5C_1=5$（通り）

残り2人を男子から選ぶ方法が　${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$（通り）

よって　$5\times10=50$（通り）

女子を2人含むとき，選ばれる女子が　${}_5C_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$（通り）

残り1人を男子から選ぶ方法が　${}_5C_1=5$（通り）　　よって　$10\times5=50$（通り）

3人とも女子のとき，その選び方が　${}_5C_3={}_5C_2=10$（通り）

よって，女子を少なくとも1人含む方法は　$50+50+10=\mathbf{110}$（通り）

【別解】　3人とも男子を選ぶ場合が　${}_5C_3={}_5C_2=10$（通り）

よって,これを選び方の総数から除くと女子を少なくとも1人含む場合が得られる．したがって求める総数は　$120-10=\mathbf{110}$（通り）

(2)　A，B，C，D 4種類のものから重複を許して7個選ぶ重複組合せで，

その総数は○7個，｜3本の総順列に等しい．

したがって求める総数は　$\dfrac{10!}{7!3!}={}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{120}$（通り）

また，A，B，C，Dを少なくとも1つずつ選ぶ場合の総数は，7個の○の間6カ所のいずれか3カ所に｜を1本ずつ入れる総数に等しい．したがって求める総数は

${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{20}$（通り）

第13講　確率(1)

> 大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の出方は全部で **アイ** 通りある．出目の最大値が5になるか，または出目の最小値が2になる場合を求めたい．出目の最大値が5以下になるのは2個のさいころの出目がともに1〜5のときで，その場合の数は **ウエ** 通り．同様に出目の最大値が4以下になる場合の数は **オカ** 通り．よって出目の最大値が5になる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．出目の最小値が2になる場合も同様に求められる．また，出目の最大値が5かつ出目の最小値が2になる確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサ}}$ である．したがって，出目の最大値が5になるか，または出目の最小値が2になる確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である．

目の出方は全部で　$6^2=\mathbf{36}$（通り）

出目の最大値が5以下になるのは，$5^2=\mathbf{25}$（通り）

出目の最大値が4以下になるのは，$4^2=\mathbf{16}$（通り）

よって，出目の最大値が5になるのは　$25-16=9$（通り）

したがって，出目の最大値が5になる確率は　$\dfrac{9}{36}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$　である．

同様に，出目の最小値が2になるのは，出目の最小値が2以上になる場合から，出目の最小値が3以上になる場合を除いた　$5^2-4^2=9$（通り）

よって，出目の最小値が2になる確率は $\dfrac{1}{4}$ である．

また，出目の最大値が5　かつ　出目の最小値が2となるのは，2個のさいころの出目の組合せが(2, 5)のときで，その場合の数は　$2!=2$（通り）である．

よって，出目の最大値が5　かつ　出目の最小値が2となる確率は　$\dfrac{2}{36}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}}$　である．

したがって，出目の最大値が5，または出目の最小値が2となる確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{18}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}$$

第 14 講　確率(2)

A，B の 2 人が次のような規則の下で得点を競うゲームを行う．1 個のさいころを投げて 1 か 2 の目が出た場合は A がその回の勝者として 2 点を得て，3 以上の目が出た場合は B がその回の勝者として 1 点を得るものとし，この操作を繰り返して先に 4 点得た方をゲームの優勝者としてゲームを終了する．

　このとき，A が優勝者となる確率を求めたい．B が優勝者となるためには，A が 2 回勝つ前に B が 4 回勝たなければならない．B が 1 回目から 4 連勝して優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ である．また，B が 1 回目から 4 連勝せずに優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キクケ}}$ である．したがって，A が優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{コサシ}}{\boxed{キクケ}}$ である．

さいころを 1 回投げて A が勝者として 2 点を得る事象を A，B が勝者として 1 点を得る事象を B とすると，

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{2}{3}$$

　B が 1 回目から 4 連勝する確率は　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\mathbf{\dfrac{16}{81}}$

B が 1 回目から 4 連勝せずに優勝者となるのは，さいころを 4 回投げて事象 B が 3 回，事象 A が 1 回起こり，5 回目に投げて事象 B が起こるときである．

　その確率は　${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{2}{3}=\mathbf{\dfrac{64}{243}}$

よって，B が優勝者となる確率は　$\dfrac{16}{81}+\dfrac{64}{243}=\dfrac{112}{243}$

したがって，A が優勝者となる確率は　$1-\dfrac{112}{243}=\mathbf{\dfrac{131}{243}}$

第 15 講　命題と証明

次の [　　] に最も適するものを下の選択肢①～④から 1 つ選べ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$x<y$ は $cx<cy$ であるための [ア]．

(2)　$a>0$ は $\sqrt{a^2}=a$ が成り立つための [イ]．

(3)　$ab+1=a+b$ は a，b のうち少なくとも 1 つは 1 であるための [ウ]．

(4)　$a>0$ または $b>0$ であることは $a+b=1$ であるための [エ]．

①　必要十分条件である　②　必要条件であるが十分条件ではない
③　十分条件であるが必要条件ではない　④　必要条件でも十分条件でもない

(1)　(十分性)「$x<y \implies cx<cy$」は　偽（反例：$x=1$，$y=2$，$c=-1$）．
　(必要性)「$cx<cy \implies x<y$」は　偽（反例：$x=-1$，$y=-2$，$c=-1$）．
　したがって，④（必要条件でも十分条件でもない）

(2)　(十分性)「$a>0 \implies \sqrt{a^2}=a$」は　明らかに真．
　(必要性)「$\sqrt{a^2}=a \implies a>0$」は　偽（反例：$a=0$）．
　したがって，③（十分条件であるが必要条件ではない）

(3)　$ab+1=a+b$　より　$ab-a-b+1=0$　　$(a-1)(b-1)=0$
　よって　$a=1$　または　$b=1$
　これは a，b のうち少なくとも 1 つは 1 であることと同値である．
　したがって，①（必要十分条件である）

(4)　(十分性)「$a>0$ または $b>0 \implies a+b=1$」は　偽（反例：$a=2$，$b=0$）．
　(必要性)「$a+b=1 \implies a>0$ または $b>0$」の対偶は，
　「$a\leqq 0$ かつ $b\leqq 0 \implies a+b\neq 1$」
　$a\leqq 0$ かつ $b\leqq 0$ のとき $a+b\leqq 0$　より　$a+b=1$ となることはない．よって　真．
　したがって，②（必要条件であるが十分条件ではない）

第 16 講　式と証明(1)

(1)　$\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{\boxed{ア}}{(x-\boxed{イ})(x+\boxed{ウ})}$ である．

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の最小値は $\boxed{エ}$ である．

(3)　$x=1-\sqrt{7}\,i$ のとき，$x^3-4x^2+12x-15$ の値を求めたい．$x-1=-\sqrt{7}\,i$ よりこの式の両辺を 2 乗し，x について整理すると $x^2-\boxed{オ}x+\boxed{カ}=0$ であり，$x=1-\sqrt{7}\,i$ はこの式を満たす．

ここで $x^3-4x^2+12x-15=(x^2-\boxed{オ}x+\boxed{カ})(x-\boxed{キ})+\boxed{ク}$ であることより，$x^3-4x^2+12x-15=\boxed{ケ}$ である．

(1)　$\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{x(x+1)}$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{\mathbf{3}}{(x-\mathbf{1})(x+\mathbf{2})}$

(2)　$a>0$，$b>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=4$$

等号成立は　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$　　$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$ のとき．

よって　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の最小値は　$\mathbf{4}$ である．

(3)　$x-1=-\sqrt{7}\,i$ より　$(x-1)^2=(-\sqrt{7}\,i)^2$　　$x^2-2x+1=-7$

よって　$x^2-\mathbf{2}x+\mathbf{8}=0$

ここで　$(x^3-4x^2+12x-15)\div(x^2-2x+8)$ を計算することにより，

$x^3-4x^2+12x-15=(x^2-\mathbf{2}x+\mathbf{8})(x-\mathbf{2})+\mathbf{1}$

$x=1-\sqrt{7}\,i$ のとき $x^2-2x+8=0$ であるから

$x^3-4x^2+12x-15=\mathbf{1}$

第17講　式と証明(2)

(1)　A，Bの2人が同じ2次方程式 $x^2+bx+c=0$ を解いたが，Aは1次の係数を，Bは定数項を写し間違って計算したため，Aは $x=-2,\ 6$，Bは $x=-2\pm\sqrt{2}\,i$ という解を得た．このとき $b=$ [ア]，$c=-$[イウ] であり，正しい解は $x=-$[エ]，[オ] である．

(2)　3次方程式　$x^3-2x^2+(a-3)x+a=0$　……①　が2重解をもつときの定数 a の値を求めたい．$x^3-2x^2+(a-3)x+a=(x+$[カ]$)(x^2-$[キ]$x+a)$ より①の解の1つは $x=-$[カ] である．x^2-[キ]$x+a=0$　……②　が $x=-$[カ] を解にもつとき，$a=-$[ク] である．このとき②は $x=-$[カ] を重解にもつことはなく，題意を満たす．また，②が重解をもつとき，$a=\dfrac{[ケ]}{[コ]}$ であり，このとき②の重解は $x=-$[カ] ではなく題意を満たす．したがって求める a の値は

$a=-$[ク]，$\dfrac{[ケ]}{[コ]}$ である．

(1)　方程式と解の関係において，1次の係数に関係するのは2解の和，定数項に関係するのは2解の積である．よってAが出した2解は積が正しく，Bが出した2解は和が正しい．よって，もとの方程式の2解を α，β とすると

$$\alpha\beta=-2\cdot 6=-12,\ \alpha+\beta=(-2+\sqrt{2}\,i)+(-2-\sqrt{2}\,i)=-4$$

より，α，β を2解にもつ2次方程式の1つは　$x^2+4x-12=0$　である．

これと $x^2+bx+c=0$ を比較することにより，$b=\mathbf{4}$，$c=\mathbf{-12}$　である．

また，正しい解は　$(x+6)(x-2)=0$　より　$x=\mathbf{-6,\ 2}$　である．

(2)　$x^3-2x^2+(a-3)x+a=(x+\mathbf{1})(x^2-\mathbf{3}x+a)=0$ より，①の解の1つは　$x=-1$　である．

②すなわち $x^2-\mathbf{3}x+a=0$ が $x=-\mathbf{1}$ を解にもつとき，代入して　$a=\mathbf{-4}$

このとき　②より　$x^2-3x-4=0$　　この2解は $x=-1,\ 4$ より　②は $x=-1$ を重解にもたず，適する．

$x^2-3x+a=0$ が重解をもつとき，判別式を D とすると　$D=9-4a=0$　　$a=\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$

このとき　②より　$x^2-3x+\dfrac{9}{4}=0$　　よって　$x=-1$ ではない重解 $x=\dfrac{3}{2}$ をもち，適する．

第 18 講　三角関数(1)

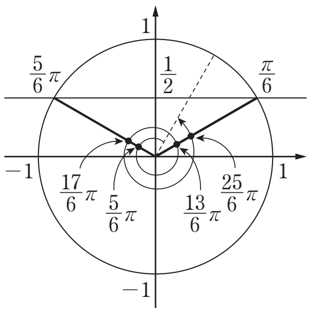
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ を満たす θ の値は，$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$，$\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\pi$，$\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{ア}}}\pi$，$\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{エオ}}}\pi$

である．（$\boxed{\text{イウ}}$，$\boxed{\text{キク}}$ は順序を問わない．）

(2)　$2\sin^2\theta - 3\sqrt{2}\cos\theta + 2 > 0$ を満たす θ の値の範囲は $\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}} < \theta < \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ である．

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\frac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{13}{3}\pi$



よって　$2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \frac{25}{6}\pi$

したがって　$\theta = \frac{\pi}{\mathbf{4}},\ \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{12}}\pi,\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\pi,\ \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{12}}\pi$

(2)　$2\sin^2\theta - 3\sqrt{2}\cos\theta + 2 > 0$ より

$2(1-\cos^2\theta) - 3\sqrt{2}\cos\theta + 2 > 0$

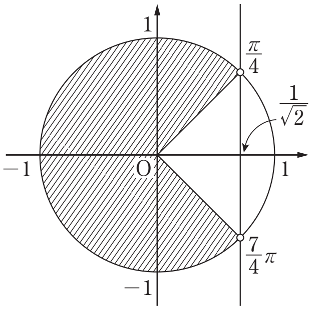
$2\cos^2\theta + 3\sqrt{2}\cos\theta - 4 < 0$

$(2\cos\theta - \sqrt{2})(\cos\theta + 2\sqrt{2}) < 0$

$-2\sqrt{2} < \cos\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$

つまり　$-1 \leqq \cos\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\frac{\pi}{\mathbf{4}} < \theta < \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\pi$



第19講　三角関数(2)

$\sin\frac{\pi}{10}$ の値を以下のようにして求める．$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき $5\theta=\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ であることより

$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ ……① が成り立つ．ここで

$\sin 2\theta=\boxed{\text{イ}}\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=\boxed{\text{ウ}}\cos^3\theta-\boxed{\text{エ}}\cos\theta$

であることより，①は $\boxed{\text{イ}}\sin\theta\cos\theta=\boxed{\text{ウ}}\cos^3\theta-\boxed{\text{エ}}\cos\theta$ ……② と変形できる．

$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0$ より②の両辺を $\cos\theta$ で割って整理すると

$\boxed{\text{オ}}\sin^2\theta+\boxed{\text{カ}}\sin\theta-1=0$ となる．これを $\sin\theta$ について解くと，

$\sin\theta=\frac{-\boxed{\text{キ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．ここで $0<\sin\frac{\pi}{10}<1$ であることより，

$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-\boxed{\text{キ}}+\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

$\theta=\frac{\pi}{10}$ のとき　$5\theta=\frac{\pi}{\mathbf{2}}$ であることより　$\sin 2\theta=\sin(5\theta-3\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)=\cos 3\theta$

よって　$\sin 2\theta=\cos 3\theta$　……①　が成り立つ．

ここで，$\sin 2\theta=\mathbf{2}\sin\theta\cos\theta$

また，$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=\mathbf{4}\cos^3\theta-\mathbf{3}\cos\theta$

よって①は　$\mathbf{2}\sin\theta\cos\theta=\mathbf{4}\cos^3\theta-\mathbf{3}\cos\theta$　と変形できる．

両辺を $\cos\theta(\neq 0)$ で割って

$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3$　　$2\sin\theta=4(1-\sin^2\theta)-3$　　よって　$\mathbf{4}\sin^2\theta+\mathbf{2}\sin\theta-1=0$

これを $\sin\theta$ について解いて　$\sin\theta=\frac{-\mathbf{1}\pm\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{4}}$

$0<\sin\frac{\pi}{10}<1$　より　$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{4}}$

第 20 講　三角関数(3)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$f(\theta) = 3\sin\theta\cos\theta - \sin\theta - \cos\theta$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x = \sin\theta + \cos\theta$ とおくとき，x のとり得る値の範囲は $-\sqrt{\boxed{ア}} \leqq x \leqq \sqrt{\boxed{イ}}$ である．

(2)　$f(\theta)$ を x の式で表すと，$f(\theta) = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}x^2 - x - \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である．

(3)　$f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{キ}}{2} + \sqrt{\boxed{ク}}$，最小値は $-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．また，最大値をとる θ の値は $\theta = \dfrac{\boxed{サ}}{4}\pi$ である．

(1)　$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$　　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$

よって　$-1 \leqq \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$　　したがって　$-\sqrt{\mathbf{2}} \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{\mathbf{2}}$

(2)　$x = \sin\theta + \cos\theta$　の両辺を 2 乗すると

$$x^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

よって　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{x^2 - 1}{2}$

したがって，$f(\theta) = 3\sin\theta\cos\theta - \sin\theta - \cos\theta = 3 \cdot \dfrac{x^2 - 1}{2} - x = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}x^2 - x - \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

(3)　$f(\theta) = \dfrac{3}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{5}{3}$

(1)より　$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲において，$f(\theta)$ は

$x = -\sqrt{2}$ のとき　最大値　$\dfrac{\mathbf{3}}{2} + \sqrt{\mathbf{2}}$　　$x = \dfrac{1}{3}$ のとき　最小値　$-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$　をとる．

また，$x = -\sqrt{2}$ のとき　$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$　　つまり　$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ より　$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$　　したがって　$\theta = \dfrac{\mathbf{5}}{4}\pi$

第21講　図形と方程式(1)

xy 平面上に2点 A(3, 2), B(8, 9) と，直線 l：$y=x-3$ 上を動く点Pがある．AP＋PB の値が最小となるときの点Pの座標を求めよう．点Aを通り，直線 l に垂直な直線 m の方程式は $y=-x+$ [ア] である．また，直線 l と直線 m の交点Mの座標は ([イ], [ウ]) である．ここで，直線 l に関して点Aと対称な点を A′$(a,\ b)$ とおき，2点A，A′ の中点の座標が点Mと一致することを利用すると，$a=$ [エ]，$b=$ [オ] である．AP＋PB の最小値は A′P＋PB の最小値と等しく，それは直線 A′B 上に点Pが存在するときである．直線 A′B の方程式は $y=$ [カ] $x-$ [キク] であることより，点Pの座標は ([ケ], [コ]) である．

点Aを通り，直線 l に垂直な直線 m の方程式は

$$y=-1(x-3)+2 \quad \text{つまり} \quad y=-x+\mathbf{5}$$

直線 l と直線 m の交点の座標は　M(**4**, **1**) である．

直線 l に関して点Aと対称な点 A′$(a,\ b)$ について，

2点A，A′ の中点の座標は　$\left(\dfrac{a+3}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)$

この点と点 M(4, 1) が一致するとき

$$\frac{a+3}{2}=4,\ \frac{b+2}{2}=1 \qquad \text{よって} \quad a=\mathbf{5},\ b=\mathbf{0}$$

したがって　A′(5, 0) である．

直線 A′B の方程式は　$y=3(x-5)+0$　つまり　$y=\mathbf{3}x-\mathbf{15}$　であり，点Pは直線 A′B と直線 l の交点であることより，P(**6**, **3**) である．

第 22 講　図形と方程式(2)

(1)　点 (3, 0) において x 軸に接し，かつ直線 $3y-4x=12$ に接する円の方程式は

$(x-$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2=$ ウ ，$(x-$ ア $)^2+(y+$ エオ $)^2=$ カキク

である．

(2)　2 円 C_1：$x^2+y^2=16$，C_2：$x^2+y^2-4x-2y-20=0$ について，C_1，C_2 の中心間の距離は $\sqrt{\text{ケ}}$ である．この距離が 2 円の半径の差より大きく，和より小さいことより，2 円は異なる 2 交点をもつことがわかる．この異なる 2 交点を通る直線の方程式は

$y=-$ コ $x-$ サ である．

(1)　求める円は点 (3, 0) で x 軸に接するので，中心を $(3,\ r)$ とおくと

半径は $|r|$ となる．

また，この円は直線 $4x-3y+12=0$ に接するので，中心と直線の距離が半径と等しい．

よって　$\dfrac{|4\cdot 3-3\cdot r+12|}{\sqrt{16+9}}=|r|$　つまり　$|3r-24|=5|r|$

両辺を 2 乗して　$(3r-24)^2=25r^2$　　$r^2+9r-36=0$　　$(r-3)(r+12)=0$

$r=3,\ -12$

したがって，求める円の方程式は　$(x-\mathbf{3})^2+(y-\mathbf{3})^2=\mathbf{9}$，$(x-\mathbf{3})^2+(y+\mathbf{12})^2=\mathbf{144}$

(2)　円 C_1：$x^2+y^2=16$　について，中心 (0, 0)，半径 4

円 C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=25$　について，中心 (2, 1)，半径 5

この 2 円の中心間の距離は　$\sqrt{4+1}=\sqrt{\mathbf{5}}$

2 円の半径の差は 1，和は 9 であり，$1<\sqrt{5}<9$ であることより，この 2 円は異なる 2 点で交わることがわかる．

2 円 C_1，C_2 の 2 交点を通る図形の方程式は

$(x^2+y^2-16)+k(x^2+y^2-4x-2y-20)=0$　と表せる．

この方程式が直線を表すとき，$k=-1$ である．

このとき　$(x^2+y^2-16)-(x^2+y^2-4x-2y-20)=0$　より　$4x+2y+4=0$

したがって，2 円の異なる 2 交点を通る直線の方程式は　$y=-\mathbf{2}x-\mathbf{2}$　である．

第23講　図形と方程式(3)

定点O(0, 0)，A(4, 2)と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ の周上を動く点Pがある．次の問いに答えよ．

(1)　3点O，A，Pが同一直線上にあるとき，点Pの座標は(4, 2)または

$\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\right)$ である．

(2)　△OAPの重心の軌跡は，中心 $\left(\boxed{オ},\ \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\right)$，半径 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ の円である．ただし，点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$，$\left(\dfrac{\boxed{コ}}{5},\ \dfrac{\boxed{サ}}{5}\right)$ を除く．

(1)　直線OA：$y=\dfrac{1}{2}x$ と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ の交点の y 座標は

$(2y-2)^2+(y-2)^2=4$　　つまり　$5y^2-12y+4=0$　より　$y=2,\ \dfrac{2}{5}$　であるから，

3点O，A，Pが一直線上にあるとき，点Pの座標は　(4, 2)または $\left(\mathbf{\dfrac{4}{5}},\ \mathbf{\dfrac{2}{5}}\right)$ である．

(2)　点Pの座標を $(s,\ t)$ とおくと，△OAPの重心Gの座標は $\left(\dfrac{s+4}{3},\ \dfrac{t+2}{3}\right)$ と表せる．

重心Gの座標を $(X,\ Y)$ とおくと，$X=\dfrac{s+4}{3}$，$Y=\dfrac{t+2}{3}$ より　$s=3X-4$，$t=3Y-2$ である．

また $P(s,\ t)$ は円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 上の点であることより，

$$(3X-4-2)^2+(3Y-2-2)^2=4 \qquad \{3(X-2)\}^2+\left\{3\left(Y-\frac{4}{3}\right)\right\}^2=4$$

$$9(X-2)^2+9\left(Y-\frac{4}{3}\right)^2=4 \qquad (X-2)^2+\left(Y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

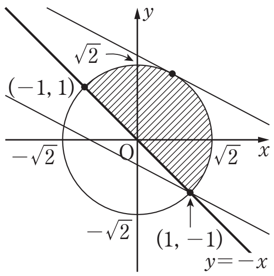
さらに $(s,\ t)\neq(4,\ 2),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ より，$(X,\ Y)\neq\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right),\ \left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ である．

したがって，求める重心Gの軌跡は　中心 $\left(\mathbf{2},\ \mathbf{\dfrac{4}{3}}\right)$，半径 $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$ の円．

ただし，点 $\left(\mathbf{\dfrac{8}{3}},\ \mathbf{\dfrac{4}{3}}\right)$，$\left(\mathbf{\dfrac{8}{5}},\ \mathbf{\dfrac{4}{5}}\right)$ を除く．

第24講　図形と方程式(4)

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 2$, $y \geqq -x$ で表される領域を D とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内の点であるとき，$3x+4y$ は $x=\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$，$y=\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ をとり，$x=\boxed{ク}$，$y=-\boxed{ケ}$ のとき最小値 $-\boxed{コ}$ をとる．



$x^2+y^2=2$ と $y=-x$ より　$(x,\ y)=(-1,\ 1),\ (1,\ -1)$

よって領域 D は右図斜線部分．境界を含む．

$3x+4y=k$ とおくと，$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{k}{4}$　……①

よって，傾き $-\dfrac{3}{4}$ の直線①が領域 D と共有点をもつ範囲において，y 切片 $\dfrac{k}{4}$ が最大，最小となるときが，それぞれ k が最大，最小となるときである．

最大となるのは，直線①すなわち　$3x+4y-k=0$ が　円 $x^2+y^2=2$ と第1象限で接するときである．中心 $(0,\ 0)$ と直線①の距離が半径 $\sqrt{2}$ と等しいとき

$$\frac{|-k|}{\sqrt{9+16}}=\sqrt{2}\quad より\quad |k|=5\sqrt{2}\quad よって\quad k=\pm 5\sqrt{2}$$

第1象限で接するとき　$k>0$ より　$k=5\sqrt{2}$

このとき，直線①に垂直で円の中心を通る直線は　$y=\dfrac{4}{3}x$

この直線と直線①：$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ の交点の座標は　$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{5},\ \dfrac{4\sqrt{2}}{5}\right)$

最小となるのは，直線①が点 $(1,\ -1)$ を通るときで，最小値は

$$k=3\cdot 1+4\cdot(-1)=-1$$

したがって，$3x+4y$ は

$x=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{2}}}{\mathbf{5}}$, $y=\dfrac{\mathbf{4\sqrt{2}}}{\mathbf{5}}$ のとき　最大値 $\mathbf{5\sqrt{2}}$　　$x=\mathbf{1}$, $y=-\mathbf{1}$ のとき　最小値 $-\mathbf{1}$　をとる．

高1・2　ハイレベル数学ⅠＡⅡＢを受講する皆さんへ

ようこそ,『スタディサプリ』 数学の講座へ！　この講座は,**次のような人**に効果的です.

- **「学校の学習に加えて一歩進んだ学習をしたい」**という意欲的な人
  ⇒　この講座を受講すると,本質的な理解が身につきます.
  学校で習った知識をより深めることで,さらに学校の授業が楽しくなります.
- **「教科書で理解が不十分だったところをちゃんと理解したい」**という人
  ⇒　この講座には,改めてこの分野を勉強するために書かれたページが用意されています.
  そしてわかったかを確かめるための問題で,理解度をチェックできます.
- **「問題集を解いたけど解き方がしっくりこない…」**という疑問をもっている人
  ⇒　この講座には,すべての問題に「詳細な解答」がついています.
  もちろん,メインとなる「講義問題」には,リアルな迫力の「動画授業」が！
  受けている間にその解法や世界に引き込まれるでしょう.

そして,こんな人にも効果的です.

●受験で使うから,もっと数学ができるようになりたい！

●暗記して計算して乗り切ってきたけど,本質を理解したい！

そのすべてをかなえるために用意されたのが以下です.

◎**『テキスト』**　…「基礎確認事項」「CHECK & UP」「講義問題」「練習問題」

◎**『講義動画（授業）』**

◎**『テキスト 解答集』**　…「CHECK & UP の解答」「講義問題の解答」「練習問題の解答」

「授業を受けっぱなし」「板書で省略された途中計算がわからない」「せっかく練習問題を解いたのに答えしかない」といった問題をすべて解決！　これらの効果的な使い方は後ほど説明しますが,このサイクルをしっかり活用すれば,学校の授業や自分の勉強がより楽しくなることでしょう.**わかれば,面白い.面白ければ,先が知りたくなる.**当然ですね.

「人から人へ」.それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません.直接会うことはなかなかできませんが,みなさんが真剣に動画を視聴すれば,まるで目の前に先生がいるような錯覚すら覚えることでしょう.なぜなら,先生はいつでも君たち一人ひとりが真剣に授業を受けている姿をカメラの向こうに見ながら授業しているのですから.

さぁ,そろそろ時間です.**いつでも,どこでも,何度でも.**ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

＜後期　目次＞

第 25 講　指数関数・対数関数(1)
第 26 講　指数関数・対数関数(2)
第 27 講　指数関数・対数関数(3)
第 28 講　微分法・積分法(1)
第 29 講　微分法・積分法(2)
第 30 講　微分法・積分法(3)
第 31 講　微分法・積分法(4)
第 32 講　微分法・積分法(5)
第 33 講　微分法・積分法(6)
第 34 講　数列(1)
第 35 講　数列(2)
第 36 講　数列(3)
第 37 講　数列(4)
第 38 講　数列(5)
第 39 講　平面ベクトル(1)
第 40 講　平面ベクトル(2)
第 41 講　平面ベクトル(3)
第 42 講　平面ベクトル(4)
第 43 講　平面ベクトル(5)
第 44 講　空間ベクトル(1)
第 45 講　空間ベクトル(2)
第 46 講　空間ベクトル(3)
第 47 講　整数の性質(1)
第 48 講　整数の性質(2)

＜講座の受講の仕方＞

ここでは，効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします．講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答冊子」に分かれています．この３つを効果的に使い，実力を伸ばしていきましょう．

①　基礎確認事項（テキスト）

すべての講は，まずこの「基礎確認事項」から始まっています．各分野の基礎となる事項がまとめられています．みなさんの持っている教科書と同じ表現もあれば，そうでない部分・発展的表現も含まれています．

- **この分野を習っていない人**
- **習ったけどもう一度確認したい人**
- **理解しているつもりだけど穴がないか，理解不足がないかチェックしたい人**

は，必ずこの「基礎確認事項」を熟読してください．**この分野を深く学ぶ上で必要な知識や考え方が身につく**ことでしょう．

しかし，注意点として，「書いてあること全てを最初から理解しようとしない」ことです．問題を解いている中で理解が深まることや，後から振り返ってもう一度読んだときにその意味がわかることもあります．まず大切なのは「全体感」をつかむことです．

また，区切りごとに「⇒　C&U [1]」として，関連する「CHECK & UP」の問題番号が示されています．参考にしてください．

②　CHECK & UP（テキスト）

「基礎確認事項」に続き，この「CHECK & UP」が掲載されています．この問題は，「基礎確認事項」とリンクした問題です．

- **基礎確認事項で整理した知識を試したい人**
- **この分野の問題を一通りざっと確認したい人**
- **忘れたかけた知識を取り戻したい人**

は，この「CHECK & UP」を必要に応じてノートに解きましょう．解き終えたら「テキスト解答」の「CHECK & UP」の欄を参照してください．解くときの方針・注意点・別解などが掲載されていますので，自分の解き方・途中計算などをチェックしておいてください．

この「CHECK & UP」の問題数は，教科書や教科書準拠問題集に載っている問題からみれば少ないと思うかもしれません．みなさんは学校の宿題や自分の学習でそういった問題を数多くこなすはずです．この「CHECK & UP」はそういった中から重要項目を中心に厳選して掲載しています．みなさんの自主学習により，さらなる問題にチャレンジし，さらに理解を深めておきましょう．また，解いていてつまずいた場合は，前の「基礎確認事項」にもう一度目を通しましょう．

③　講義問題について（テキスト）

「講義問題」は大問３問で構成されています．すべて厳選された無駄のない問題構成です．この分野をすでに習った人は，この問題をノートまたはルーズリーフに「予習」として解いてみましょう．問題をとらえる自分の力がどこまで養われているかがわかります．また，この分野が未習，または理解が不十分のときは，問題を読み，問われていることを理解しておきましょう．

・より上の実力を身につけたい

・発展的な考え方を知りたい

そんなみなさんのニーズにしっかり応える問題です．

ちなみに予習される人への注意です．必ずしも答案形式にこだわる必要はありません．また，最後まで解けなくてもかまいません．１問につきおよそ10分～15分．数学に本気で向き合い，自分なりに書いてみましょう．

④　講義について（動画）

予習をすること，または問題文を読んで趣旨を理解すること，これが講義動画を視聴する前に必要な準備です．それができている状態で，動画を再生してください．そして，真剣に視聴して，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください．

講義問題ごとで区切っても視聴してもよいですし，１講まるごと視聴してもよいです．大事なのは

・「集中力」

・「集中しよう」「何かをこの先生から得てやる」という「気持ち」

・数学ができるようになりたいという「思い」

をもって視聴することです．惰性はいけませんよ．

テキストの講義問題のページは全て「見開き」の構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています．ここには何でも「自由」に書いて残すことができます．「自由」とはどういうことか．それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです．授業時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません．よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです．きれいにまとめても誰も見てくれませんよ．あくまで「Note」＝「記録」です．後から見て自分だけがわかる程度でいいのです．それをメモしながら視聴してください．

これまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ．この講座はいつでも止めたり戻ったりできます．もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでもまったく遅くありませんよ．この講座でその訓練をしてください．また，動画をストップできるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です．あなた方に残された時間は限られています．勉強は数学だけじゃないでしょう？　「基礎確認事項」のところでも述べましたが，大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事ですよ．

⑤　講義問題の復習について（テキスト・解答冊子）

視聴が終わったら，テキストの問題を見ながらまずは問題によって語られた「ストーリー」を，もう一度頭に描いてみましょう．もし思い出せない場面があったら「Note 欄」を見てみましょう．そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を，別の紙や復習用ノートに解いてみましょう．予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述してみてください．もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします．

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などにより途中で止まってしまうかもしれません．また，あなたの想いをどういう記述で表現してよいかわからない場合もあるかもしれません．安心してください．すべての問題に「講義問題 解答例」がついています．必要に応じて参考にしてください．最初は見てもよいのです．見たら，今度は自分で書いて見ましょう．

・「復習したときが，真の学習の完成」

講義問題の復習をこのような気持ちをもって欠かすことなく行い，解答を自分の力だけで書き上げることができた時…その時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です．こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう．

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います．そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします．チャンスは「空き時間」「隙間時間」です．一度自分で取り組んだことは，次に解くときは確実に速度と正確性が上がります．それを実感することも成長の糧となりましょう．

⑥　練習問題ついて　（テキスト・解答冊子）

④や⑤が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう．「練習問題」が各講１題ずつ用意してあります．講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります．また問題によって難易度も様々です．講義で得たことを参考に解いてみましょう．

・「自分はちゃんと理解できているのか」

・「新しい問題に見えても，今までの知識を使えるか」

それをこの練習問題で試してみてください．解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう．この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です．より理解を深めていただきたく思います．

以上を確実に繰り返すことにより，「自分で考える」領域に徐々に近づくことができます．入試を想定すると，最終的には自分で答案を作り上げる必要があります．授業を受けるだけでは，「受けっぱなし」に終わることもあるでしょう．また，記憶とともに忘れ去れてしまうことも．それを防ぐためのこのサイクルが大切です．もちろん，講義動画は何度でも再生可能です．後から改めて見るとその意味がわかった，という声もよく耳にします．決して短くはないこの道

のり．１日１日，一歩一歩，焦らず，確実に進んで行きましょう．

最後に．この講義と同時並行で進める日々の自主学習においては，その理解を深めるための「解説」が重要です．例えば「授業」や「解答集」がそれに当たります．とくに「詳細な解答」，つまり答えに行き着く「プロセス」を自分の解答と照らし合わせる作業が欠かせません．ですから「最後の答」しかない問題集やプリントではお話になりません．自分で考えれば必ず答えにたどり着く！とおっしゃられる先生もいますが，「知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう．受験勉強に求められるのは，「時間対効果」です．

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」としながら自主学習を進めて行きましょう．

第 25 講　指数関数・対数関数(1)

【基礎確認事項】

［1］　指数法則と累乗根

□ n が正の整数のとき，a を n 個掛けたものを a^n と書く．ここで $a \neq 0$ のとき

$$a^0=1 \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

と定義すると，次の**指数法則**が成り立つ．

$a\neq 0$，$b\neq 0$，m，n が整数のとき

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad (a^m)^n=a^{mn} \qquad (ab)^n=a^nb^n$$

この指数法則が，m，n が有理数の場合でも成り立つように指数の意味を拡張する．

□ n が正の整数のとき，n 乗すると a になる数，すなわち $x^n=a$ の解を a の ***n* 乗根**といい，a の 2 乗根（平方根），3 乗根，4 乗根などを総称して，a の**累乗根**という．

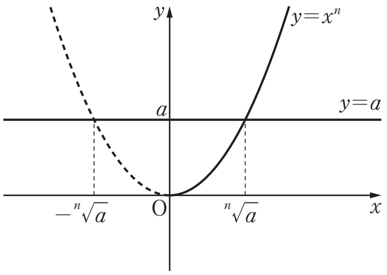
例　-4 の平方根について

実数の範囲では存在しない．

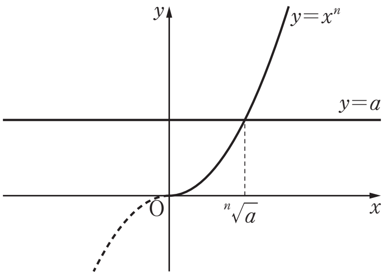
虚数の範囲では $x^2=-4=4i^2$　より　$2i$ と $-2i$.

以下では，a の n 乗根が実数であるもののみ扱う．

□ n が 2 以上の自然数のとき，$y=x^n$ のグラフの概形は以下となる．



n が偶数（$n=2, 4, 6, \cdots$）



n が奇数（$n=3, 5, 7, \cdots$）

これと $y=a$ との交点の x 座標が a の n 乗根である．ここでは $x>0$ であるもののみを考えることとする．グラフより，n が偶数，奇数にかかわらず，$a>0$ である a の値 1 つにつき，交点の x 座標がただ 1 つ存在する．これを $\sqrt[n]{a}$ と表す．

$x^n=a$（$a>0$）を満たす正の数 x は　$x=\sqrt[n]{a}$
つまり a（$a>0$）の正の n 乗根は　$\sqrt[n]{a}$

例　16 の正の 4 乗根は 2　つまり　$\sqrt[4]{16}=2$

※$x<0$ の範囲も考慮すると，n が偶数のときは累乗根に $x=-\sqrt[n]{a}$ が加わり，2 個となる．また，$a=0$ のときは n の偶奇に関わらず n 乗根は 0 である．$a<0$ のときは n が偶数のときは存在せず，n が奇数のときは $x<0$ にただ 1 つ $x=-\sqrt[n]{a}$ が存在する．これらのことは上のグラフから確認できる．

累乗根について次のことが成り立つ.

□$a>0$, $b>0$, m, n を正の整数とすると

$\sqrt[n]{a}>0$,　$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$,　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$,　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

□累乗根を利用し, 累乗の指数を有理数（分数）の場合に拡張して以下のように定める.

> $a>0$, m, n が整数, r が有理数のとき
>
> $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$　　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$　　$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

これにより, 指数法則は有理数の範囲に拡張される.

> $a\neq0$, $b\neq0$, r, s が有理数のとき
>
> $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$　　$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$　　$(a^r)^s=a^{rs}$　　$(ab)^r=a^rb^r$

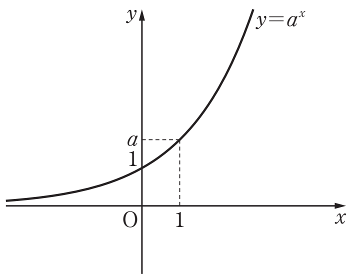
※$a>0$ のとき, a^r の指数 r は実数まで拡張することができ, さらに指数法則が成り立つことが知られている.

⇒ C&U 1

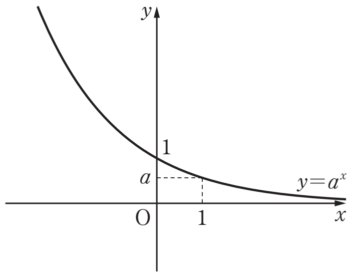
［2］ 指数関数とそのグラフ

□a を1とは異なる正の定数とするとき, 実数 x に a^x を対応させることによって, 関数 $y=a^x$ が得られる. この関数を, a を底とする x の**指数関数**という.

□一般に, 指数関数 $y=a^x$ のグラフは以下のようになる.



$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき

いずれも x 軸を漸近線にもち, (0, 1), (1, a) を通る. また, 次のことが成り立つ.

① $a>1$ のとき　$x_1<x_2 \iff a^{x_1}<a^{x_2}$ であり, a^x は増加関数

② $0<a<1$ のとき　$x_1<x_2 \iff a^{x_1}>a^{x_2}$ であり, a^x は減少関数

③ $a>0$, $a\neq1$ のとき　$x_1=x_2 \iff a^{x_1}=a^{x_2}$　（指数の相等）

⇒ C&U 2 3

【CHECK & UP】

1 次の計算をせよ.

(1) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{32}$　(2) $(\sqrt[3]{2})^{12}$　(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

2 次の関数のグラフの概形を描け.

(1) $y=2^x$　(2) $y=2^x+1$　(3) $y=\dfrac{1}{4}\cdot 2^x$

3 次の方程式・不等式を解け.

(1) $4^x=1024$　(2) $8^x=\dfrac{1}{2}$　(3) $3^x>27$　(4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}\leqq 81$

＜ Note ＞

第25講　指数関数・対数関数(1)

1 ［1］ $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$ のとき，$a+a^{-1}$，$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ．

［2］ 次の方程式を解け．

(1) $4^x-2^{x+2}-32=0$　　(2) $3^x+3^{-x}=2$

＜ Note ＞

2　次の不等式を解け.

(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$

(2)　$\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-\frac{1}{3^{x}}-6>0$

＜ Note ＞

3 (1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ の大小を比較せよ.

(2) 関数 $y=4^x-2^{x+3}+4$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値と最小値，および，そのときの x を求めよ.

< Note >

第 25 講　指数関数・対数関数(1)

(1)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-54\geqq 0$ の解は　$x\leqq$ **アイ** である.

(2)　$2^x+2^{-x}\geqq\frac{5}{2}$ の解は　$x\leqq$ **ウエ** , **オ** $\leqq x$ である.

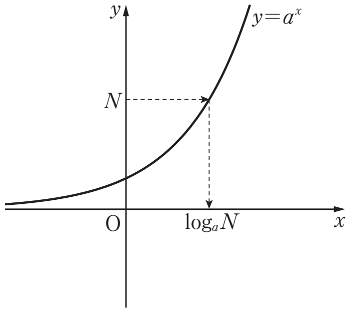
(3)　$0\leqq x\leqq 3$ の範囲において，$y=4^x-2^{x+3}+12$ の最大値は **カキ** 　最小値は **クケ** である.

＜ Note ＞

第 26 講　指数関数・対数関数(2)

【基礎確認事項】

［１］　**対数の概念**



□$a>0$，$a\neq1$ のとき，指数関数 $y=a^x$ に対して，

任意の正の数 N に対して

$N=a^x$

を満たす実数 x がただ１つ定まる．その x を

$\boldsymbol{\log_a N}$

と表し，a を底とする N の**対数**という．

また，N をこの対数の**真数**という．

$a>0$，$a\neq1$，$N>0$ のとき　　$N=a^x \iff x=\log_a N$

以下，$\log_a N$ においては，$a>0$，$a\neq1$，$N>0$ であるとする．

例　$\log_3 81$ は，3 を底とする指数関数 $y=3^x$ で $y=81$ となるときの x である．
つまり「3 を何乗すると 81」になるかを考えることで，それが「4」であるとわかる．つまり，$\log_3 81=\log_3 3^4=4$ である．

指数を考えることにより，次のことが成り立つ．

$\log_a 1=0$　$(\iff a^0=1)$　　$\log_a a=1$　$(\iff a^1=a)$　　$\log_a a^p=p$

□また，$\log_a M=\alpha$，$\log_a N=\beta$ とすると，$M=a^\alpha$，$N=a^\beta$ である．よって指数法則より
$MN=a^\alpha\times a^\beta=a^{\alpha+\beta}$ であるから，$\log_a MN=\alpha+\beta=\log_a M+\log_a N$
次の対数の性質が成り立ち，上と同様に証明できる．

M，N を正の実数，p を実数とする．

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　　（積の対数＝対数の和）

$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　　（商の対数＝対数の差）

$\log_a M^p=p\log_a M$　　（p 乗の対数＝対数の p 倍）

□対数の値を計算したり，その性質を調べる際に，底を別の数に変えた方がよい場合がある．
次の公式を導くことができる．

＜底の変換公式＞

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

この公式が成り立つことを示す．

$\log_a b=p$ とすると　$b=a^p$

対数の相等（後述）より　$\log_c b=\log_c a^p$　つまり　$\log_c b=p\log_c a$

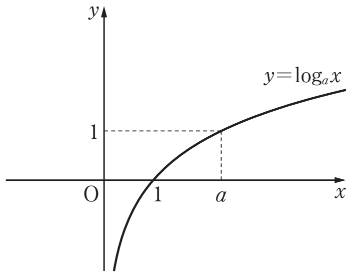
$a\neq1$ より　$\log_c a\neq0$　よって　$p=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

したがって　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ である．

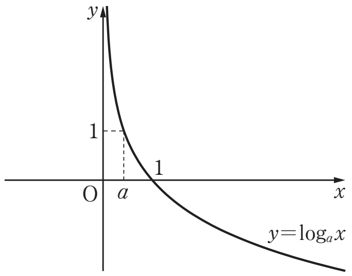
⇒　C&U ① ②

［２］ 対数関数とそのグラフ

□ a を 1 とは異なる正の定数とするとき，実数 x に $\log_a x$ を対応させることによって関数 $y=\log_a x$ が得られる．この関数を，a を底とする x の**対数関数**という．



$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき

いずれも y 軸を漸近線にもち，$(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る．また，次のことが成り立つ．

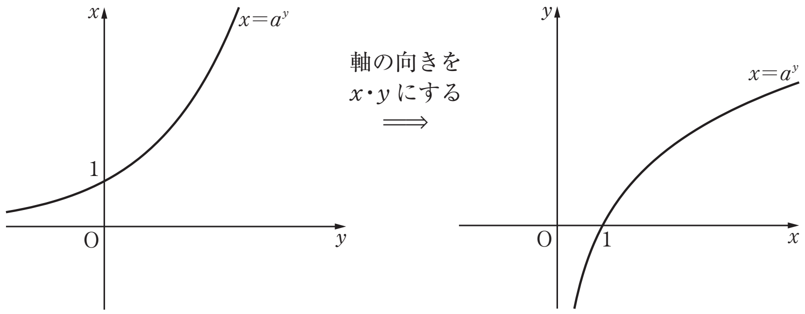
① $a>1$ のとき　$x_1<x_2 \iff \log_a x_1<\log_a x_2$ であり，a^x は増加関数

② $0<a<1$ のとき　$x_1<x_2 \iff \log_a x_1>\log_a x_2$ であり，a^x は減少関数

③ $a>0$，$a\neq 1$ のとき　$x_1=x_2 \iff \log_a x_1=\log_a x_2$ （対数の相等）

⇒　C&U ③ ④

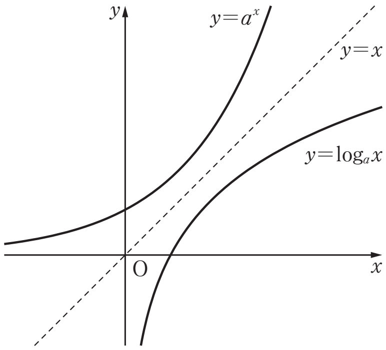
$y=a^x$ のグラフにおいて，y と x を入れ替えた $x=a^y$ のグラフを考える．



このグラフは $y=\log_a x$ と一致する．これは

$y=\log_a x \iff x=a^y$

であることからもわかる．



□指数関数 $y=a^x$ のグラフと対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは，$y=x$ に関して対称である．

また，指数関数 $y=a^x$ と対数関数 $y=\log_a x$ はともに増加関数または減少関数である．よっていずれの関数も x と y の値は $1:1$ に対応する．

【CHECK & UP】

1 次の式の値を求めよ.

(1) $\log_3 81$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}$

2 次の式を簡単にせよ.

(1) $\log_2 24-\log_2\dfrac{9}{4}+\log_2 6$　　(2) $\log_4 3\cdot\log_9 25\cdot\log_5 8$

3 次の関数のグラフの概形をかけ.

(1) $y=\log_2 x$　　(2) $y=\log_2 x+1$　　(3) $y=\log_2(x-2)$

4 次の方程式・不等式を解け.

(1) $\log_3 x=2$　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$

< Note >

第26講　指数関数・対数関数(2)

1 (1) $x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$，$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)$ の式の値を求めよ．

(2) $16^{\log_2 3}$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

2　次の方程式，不等式を解け．

（1）　$\log_3 x - \log_9 (x+2) = 0$　　（2）　$\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geqq \log_{\frac{1}{2}} 2x$

（3）　$\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$　　（4）　$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3 < 0$

< Note >

3　次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$y=\left(\log_2\frac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\frac{4}{x}\right)$　$(2\leqq x\leqq 8)$

(2)　$y=\log_2(-x^2+4x+4)$　$(0\leqq x\leqq 3)$

＜ Note ＞

第26講　指数関数・対数関数(2)

(1)　$2^{2\log_4 3}=$ ア 　である.

(2)　$(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^2-3=0$ の解は　$x=$ イウエオ, $\dfrac{\text{カ}}{\text{キク}}$ である.

(3)　$\log_3(2x-1)+\log_3(x+2)\leqq 1$　の解は　$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}<x\leqq$ サ である.

(4)　関数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-2x-x^2)$ の最小値は　シス である.

＜ Note ＞

第27講　指数関数・対数関数(3)

【基礎確認事項】

［1］　常用対数

□ 10を底とする対数 $\log_{10}x$ を**常用対数**という．x のいくつかの値に対して以下の表に表す．

x	$\cdots$	10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\cdots$
$\log_{10}x$	$\cdots$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	$\cdots$

□ $\log_{10}x$ は増加関数であることより，

x が1桁の数 $\iff$ $1\leqq x<10$ $\iff$ $10^0\leqq x<10^1$ $\iff$ $0\leqq\log_{10}x<1$

x が2桁の数 $\iff$ $10\leqq x<100$ $\iff$ $10^1\leqq x<10^2$ $\iff$ $1\leqq\log_{10}x<2$

である．一般に　以下のことが成り立つ．

> 自然数 N が n 桁 $\iff$ $n-1\leqq\log_{10}N<n$

□したがって，自然数 N の桁数を調べたいときは，$\log_{10}N$ の値を計算し，それがどの範囲にあるかを調べれば良い．N に対し，その対数の値を求めることを**対数をとる**という．値を求めるときに限らず，方程式や不等式においてもその両辺の対数をとることができる．

□同様に，以下のことが成り立つ．

> N の小数第 n 位に初めて0でない数が現れる $\iff$ $-n\leqq\log_{10}N<-n+1$

⇒ C&U 1

【CHECK & UP】

1　(1)　3^{30} は何桁の整数か．ただし，$\log_{10}3=0.4771$　とする．

(2)　0.2^{10} は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

＜ Note ＞

第 27 講　指数関数・対数関数(3)

1　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　18^{20} は何桁の数か．また最高位の数字，および末尾の数字を求めよ．

(2)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁であるような整数 n の範囲を求めよ．

< Note >

2 (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{10000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする．

(2) $2^x = 3^y = 12^z$，$xyz \neq 0$ のとき，$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z}$ の値を求めよ．

＜ Note ＞

3 ［1］　関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})-3$　について，次の問いに答えよ．

(1)　2^x+2^{-x} のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおき，$f(x)$ を t を用いて表せ．また，$f(x)$ の最小値を求めよ．

［2］　$x>1$，　$y>1$ のとき，$\log_x y+\log_y x$ の最小値を求めよ．

< Note >

第27講　指数関数・対数関数(3)

［1］ $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とするとき，3^{37} は **アイ** 桁の数である．また，3^{37} の最高位の数字は **ウ** であり，1の位の数字は **エ** である．

［2］ 関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値を求めたい．$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，t のとりうる値の範囲は $t\geqq$ **オ** である．また，$f(x)$ を t を用いて表すと $f(x)=t^2-$ **カ** $t+$ **キク** である．よって $f(x)$ の最小値は **ケコ** である．

< Note >

第 28 講　微分法・積分法(1)

【基礎確認事項】

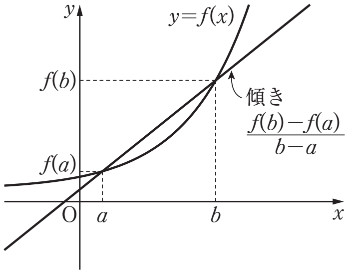
［１］　**平均変化率と微分係数**

□関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，関数の値は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化する．このとき，x の値の変化に対する関数 $f(x)$ の変化の割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，$x=a$ から $x=b$ までの $f(x)$ の**平均変化率**という．

　この平均変化率は，$y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きを表している．



□関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値をとりながら，限りなく a に近づくとき，それに応じて $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づく場合，この値 α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の**極限値**という．これを次のように表す．

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$　　　または　　　$x\to a$ のとき $f(x)\to\alpha$

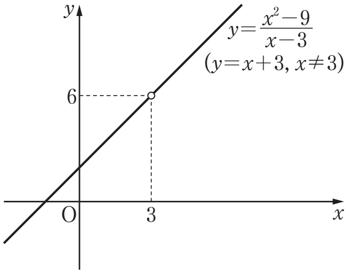
　$x\to a$ のときの極限値を考えるときには，$f(x)$ が $x=a$ で定義されていない場合がある．したがって，x が「a 以外の値をとりながら」とするのである．

例　$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$　は，分母が 0 になる $x=3$ では定義されていない．

x が 3 以外の値，すなわち $x\neq 3$ のとき

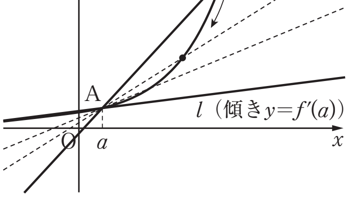
$$f(x)=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

となる．よって $x\to 3$ のとき $f(x)\to 6$ であり，このことを $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)=6$　と書くことができる．



□さて，平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ において，b を限りなく a に近づけるとき，ある一定の値に限りなく近づくならば，その値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**（または変化率）といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ と表す．つまり，$f'(a)=\displaystyle\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$　である．

□A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ とすると，$b\to a$ のとき直線 AB は点 A を通り傾きが $f'(a)$ の直線 ℓ に限りなく近づく．
この直線 ℓ を $f(x)$ の点 A における**接線**といい，点 A を**接点**という．
つまり $f'(a)$ は，関数 $f(x)$ の点 A における接線の傾きを表す．



微分係数

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

※$b-a=h$ とおくと $b=a+h$ であり，$b\to a$ のとき $h\to 0$ である．

⇒ C&U 1

［2］ 導関数

□関数 $f(x)$ が与えられたとき，x のそれぞれの値 a に対して，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を対応させると，a の関数 $f'(a)$ が得られる．この a を x に置き換えることにより，x の関数 $\boldsymbol{f'(x)}$ が得られる．この $f'(x)$ を，$f(x)$ の**導関数**という．

導関数　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

□関数 $y=f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を**微分する**という．とくに変数 x を強調するときには x で微分する，という．

$y=f(x)$ の導関数を表すのに，$f'(x)$ のほかに y'，$\dfrac{dy}{dx}$（ディーワイ・ディーエックス），

$\dfrac{d}{dx}f(x)$（ディー・ディエックス・エフエックス）といった記号も用いられる．

□$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において，x の変化量 h を **$\boldsymbol{x}$ の増分**といい，$\boldsymbol{\Delta x}$ と表す．

また，このときの y の変化量 $x(x+h)-f(x)$ を **$\boldsymbol{y}$ の増分**といい，$\boldsymbol{\Delta y}$ と表す．このとき

平均変化率は　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$　　導関数は　$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

と表される．

□一般に，次の公式が成り立つ．

導関数の公式

n が自然数のとき，関数 $y=x^n$ の導関数は　$y'=nx^{n-1}$

c が定数のとき，定数関数 $y=c$　の導関数は　$y'=0$

□また，関数 x^n の導関数を $(x^n)'$ で表すと，次のことが成り立つ．

$\{k\cdot f(x)\}'=k\cdot f'(x)$　　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　（積の微分）

⇒ C&U 2

［3］ 接線と法線

□曲線 C：$y=f(x)$ に対して，C 上の1点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ で表される．当然ながら接線は接点 A を通る．したがって，以下のことがいえる．

接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

□曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ を通り，点Aにおける接線と直交する直線を，点Aにおける曲線の法線という．接線の傾きと法線の傾きの積は -1 である．したがって，以下のことがいえる．

法線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

⇒　C&U 3

【CHECK & UP】

1　関数 $f(x)=3x^2-2x-1$ の $x=-1$ における微分係数を定義に従って求めよ．

2　次の関数を微分せよ．

(1)　$y=5x^2-3x+7$　　(2)　$y=(4x^2+5)(2x-3)$

3　関数 $y=x^3-3x^2+5$　上の点 A(1, 3) における接線の方程式を求めよ．また，点 A における法線の方程式を求めよ．

＜ Note ＞

第 28 講　微分法・積分法(1)

1　$f(x)=x^3-3x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x=1$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(2)　$x=c$ から $x=c+h$ まで変化するときの平均変化率，および $x=c$ における微分係数 $f'(c)$ を求めよ．

(3)　(2)で求めた微分係数が，(1)で求めた平均変化率と等しいとき，c の値を求めよ．

＜ Note ＞

2　(1)　$y=x^3-5x+1$ 上の点 A$(2,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　点 $(1,\ 8)$ から曲線 $y=x^3-x^2-8x+8$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(3)　点 $(3,\ 4)$ を通る傾き m の直線が，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に接するとき，m の値を求めよ．

＜ Note ＞

3 ［1］　2曲線 $y=x^3-3x$ と $y=-x^2+ax+b$ が点 $(2,\ 2)$ で接するとき，a，b の値を求めよ．

［2］　2つの放物線　$y=-x^2$ と $y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ．

< Note >

第28講　微分法・積分法(1)

2つの放物線 C_1：$y=x^2-5x+7$，C_2：$y=x^2+3x-1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C_1 上の点 $(1,\ 3)$ における接線は　$y=-$ [ア] $x+$ [イ] である．

(2)　C_1 の $x=s$ における接線は　$y=($ [ウ] $s-$ [エ] $)x-s^2+$ [オ] であり，C_2 の $x=t$ における接線は

$y=($ [カ] $t+$ [キ] $)x-t^2-$ [ク] である．よって C_1 と C_2 の両方に接する直線は　$y=x-$ [ケ] である．

< Note >

第29講　微分法・積分法(2)

【基礎確認事項】

［1］ 関数の増減と極大・極小

□$1\leqq x\leqq 2$，$3<x$ などを満たす実数 x の集合を**区間**という．

□関数 $f(x)$ について，ある区間内の任意の x_1，x_2 に対して

$x_1<x_2$　ならば　$f(x_1)<f(x_2)$

が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で（単調に）**増加**するという．

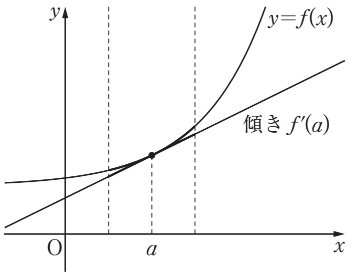
$x_1<x_2$　ならば　$f(x_1)>f(x_2)$

が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で（単調に）**減少**するという．

例　関数 $y=x^2$　は　$x\geqq 0$ の区間では単調に増加し，$x<0$ の区間では単調に減少する．

□関数 $y=f(x)$ のグラフ上の1点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ にごく近いところでは，関数のグラフは $x=a$ における接線のグラフとほとんど一致していると考えることができる．

$x=a$ における接線の傾きは $f'(a)$ であり，$f'(a)$ の値が正のときは右上がり，負のときは右下がり，0のときは x 軸に平行である．したがって，以下のことがいえる．



関数の増減

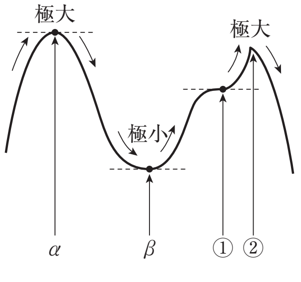
$f'(x)>0$ が成り立つ区間では $f(x)$ は増加する
$f'(x)<0$ が成り立つ区間では $f(x)$ は減少する
$f'(x)=0$ が成り立つ区間では $f(x)$ は定数である

□$y=f(x)$ において x を増加させたとき，$x=a$ の前後で

$f'(x)$ の値が正から負に変わるとき
　$f(x)$ は増加から減少に転じる．このとき
　$f(x)$ は $x=a$ で**極大**となり，$f(a)$ を**極大値**という．

$f'(x)$ の値が負から正に変わるとき
　$f(x)$ は減少から増加に転じる．このとき
　$f(x)$ は $x=a$ で**極小**となり，$f(a)$ を**極小値**という．

極大値と極小値をあわせて**極値**という．



□$f(x)$ が極値をとる x の候補として，$f'(x)=0$ となる x の値が挙げられる（上図α，β）．しかし，関数によっては $f'(x)=0$ であっても極値をとるとは限らない（上図①）．また，極値をとる x に対して常に $f'(x)=0$ が成り立つとは限らない（上図②）．

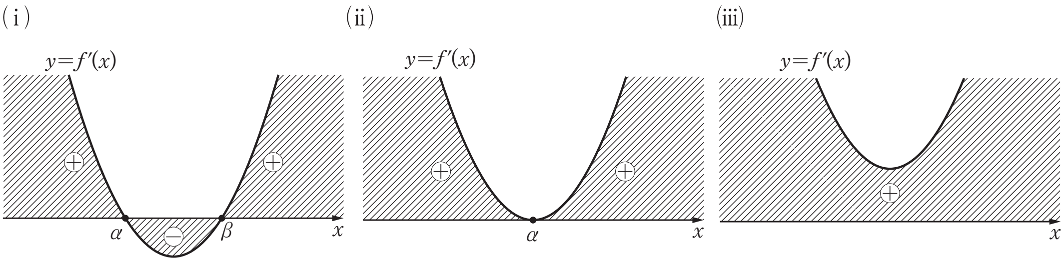
□一般に，多項式で表された関数において，$x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$ である．

⇒　C&U 1

［２］　３次関数の極値

□ 3 次関数　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において，$a>0$ とする．

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ は x^2 の係数 $3a$ が正であることより，グラフは下に凸の放物線である．以下は $y=f'(x)$ のグラフの概形である．

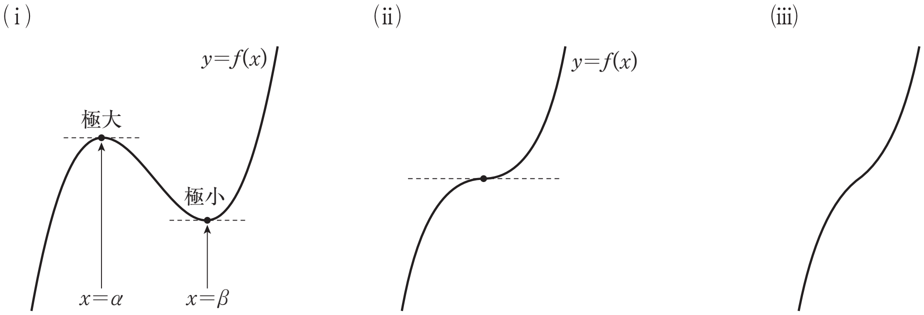


(i)の場合は，$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に，$x=\beta$ の前後で $f'(x)$ の符号が負から正にそれぞれ転じるので，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となり，$f(x)$ は 2 つの極値をもつ．

(ii)の場合は，$x=\alpha$ の前後において $f'(x)$ の符号はともに正より，$f(x)$ は極値をもたない．

(iii)の場合は，x の値に関わらず $f'(x)$ の符号は常に正より，$f(x)$ は極値をもたない．

(i)～(iii)それぞれの場合の $y=f(x)$ のグラフの概形は以下となる．



3 次関数 $y=f(x)$ が極値をもつのは(i)の場合のみである．(i)は $f'(x)=0$ において判別式を D とすると，$D>0$ である．一般的に，以下のことがいえる．

> 3 次関数 $f(x)$ が極値をもつ　$\iff$　$f'(x)=0$ で判別式 $D>0$

$a<0$ の場合も同様である．

ちなみに上の(ii)，(iii)においては，$y=f(x)$ は極値をもたず，グラフは単調に増加している．

$a<0$ の場合においても極値をもたず，グラフは単調に減少する．

⇒　C&U ２

［3］ 最大・最小

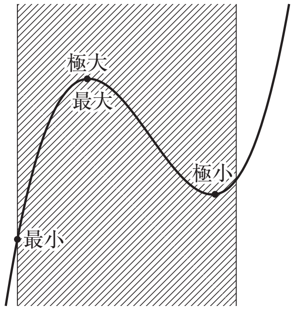
□ある区間で定義された関数 $f(x)$ について考える．この区間の1点 $x=a$ における関数の値 $f(a)$ が，この区間内のすべての x に対して

$f(x) \leqq f(a)$　ならば　$f(x)$ は $x=a$ で**最大**となり，$f(a)$ を**最大値**という．

$f(x) \geqq f(a)$　ならば　$f(x)$ は $x=a$ で**最小**となり，$f(a)$ を**最小値**という．

□関数の極大値，極小値は，それぞれを含む十分小さい区間においてはそれぞれ最大値，最小値である（局所的な最大，最小である）．しかし，区間全体からみると最大値，最小値であるとは限らない．

一般に，区間 $a \leqq x \leqq b$ における最大値，最小値を求めるには，この区間でとるすべての極値とこの区間の端点の値 $f(a)$，$f(b)$ との大小を比較すればよい．



⇒　C&U 3

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　次の関数の増減を調べ，グラフを描け．また極値を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$　(2)　$f(x)=x^3+1$　(3)　$f(x)=-x^3-4x$

2　3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$ がつねに増加するような定数 a の範囲を求めよ．

3　関数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ の $-2\leqq x\leqq 4$ における最大値，最小値を求めよ．

＜ Note ＞

第 29 講　微分法・積分法(2)

1　[1]　3 次関数　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる．このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ．

[2]　(1)　3 次関数　$f(x)=x^3+(a-2)x^2-3ax-2$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の極値を求めよ．

＜ Note ＞

2　関数 $y=x^3-3|x^2-1|-1$ の極値を求めよ.

＜ Note ＞

3　$a>0$ のとき，関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を求めよ．

< Note >

第 29 講　微分法・積分法(2)

　$a<0$ のとき　$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ の極値を求めたい．

$f'(x)=6(x-a)(x-$ ア $)$ より，$x=a$, ア のとき $f'(x)=0$ である．

$a<0<$ ア であることより，$f(x)$ は極大値　$-a^3+$ イ a^2，極小値

ウ $a-$ エ をとる．

　次に，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を求めたい．区間 $-2\leqq x\leqq 2$ に $x=$ ア

は含まれる．また，$f(x)=f($ ア $)$　より

$(x-$ ア $)^2\{2x-($ オ $a-$ カ $)\}=0$　であるから，この方程式の解は

$x=$ ア ，$\dfrac{\text{オ}\,a-\text{カ}}{2}$ である．したがって

　　$\dfrac{\text{オ}\,a-\text{カ}}{2}<-2$　つまり　$a<-$ キ のとき

　　$f(x)$ の最小値は　ウ $a-$ エ ，

　　$-$ キ $\leqq a<0$ のとき　$f(x)$ の最小値は　$-$ クケ $a-$ コサ　である．

< Note >

第30講　微分法・積分法(3)

【基礎確認事項】

［1］ 方程式への応用

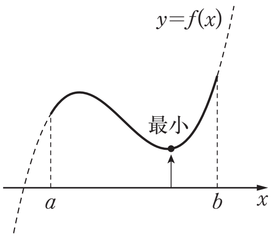
□方程式として $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ と x 軸（$y=0$）との共有点の x 座標として表される．また，方程式 $f(x)-g(x)=0$　すなわち　$f(x)=g(x)$ の実数解は，曲線（直線も含む）$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標として表される．

　したがって，方程式の実数解の個数やその正負などは，関数の増減，極大・極小などを調べ，グラフを描くことによって知ることができる．

⇒　C&U 1

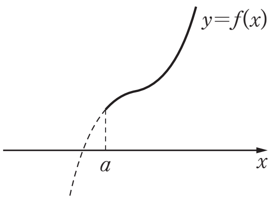
［2］ 不等式への応用

□区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ を証明するには，この区間における最小値が0または正であることを示せばよい．

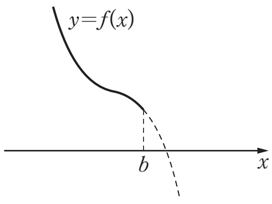


□特に区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f'(x) \geqq 0$，つまり単調増加のときは，区間の左端における関数の値 $f(a)$ が0以上であればよい．

　また，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f'(x) \leqq 0$，つまり単調減少のときは，区間の右端における関数の値 $f(b)$ が0以上であればよい．



単調増加



単調減少

□$f(x) \geqq g(x)$ を証明する主な手法として，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの上下関係や共有点を調べる方法と，$f(x)-g(x) \geqq 0$ を示す，すなわち $h(x)=f(x)-g(x)$ とおいて $h(x) \geqq 0$ を示す方法がある．

⇒　C&U 2

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　方程式 $4x^3-6x^2+1=0$ の実数解の個数とその正負を調べよ.

2　次の不等式を証明せよ.

(1)　$x>0$ のとき　$(x+1)^3>6x^2+1$

(2)　$x^4+3 \geqq 4x$

＜ Note ＞

第30講　微分法・積分法(3)

1　xについての方程式$3x^4-4x^3-12x^2-a=0$が次の条件をみたすように，定数aの値の範囲を求めよ.

(1)　4個の異なる実数解をもつ.

(2)　2個の異なる正の実数解のみもつ.

＜ Note ＞

2　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-x$ へ異なる 3 本の接線が引けるとする．このような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ．

＜ Note ＞

3　$x \geqq 0$ において常に不等式　$x^3-3ax^2+4a>0$ が成り立つように定数 a の範囲を定めよ.

< Note >

第 30 講　微分法・積分法(3)

［1］ 3 次方程式 $2x^3+3ax^2+a+2=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ a の値の範囲は

$-$ ア $<a<-$ イ である.

［2］ $x \geqq -2$ のとき $-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+b<0$ がつねに成立するような b の値の範囲

は $b<-\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ である.

< Note >

第 31 講　微分法・積分法(4)

【基礎確認事項】

［１］　不定積分

微分の演算に対して，その逆の演算としての積分について考える．

例　$f(x)=3x^2$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数として

x^3，x^3+1，x^3-2

などがある．

□微分して $3x^2$ になる関数は，x^3+C　（C は定数）　の形で表される．定数 C は微分すると 0 になるため，C は任意の定数である．

□一般に，関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数を，$f(x)$ の**不定積分**または**原始関数**といい，$\boldsymbol{\int f(x)dx}$ で表す．上の例では，$\int 3x^2dx=x^3+C$　である．C は任意の定数であるため，$f(x)$ の原始関数が存在するならば，それは無数にある．

□関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**という．また，$\int f(x)dx$ において，$f(x)$ を**被積分関数**，x を**積分変数**という．

□$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の１つとすると，任意の不定積分は　$\int f(x)dx=F(x)+C$　の形で表される．この定数 C を**積分定数**という．

$$F'(x)=f(x) \iff \int f(x)dx=F(x)+C \quad (C：積分定数) \quad \cdots\cdots①$$

□ n が 0 または正の整数のとき　$\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n$ であることから，次のことが成り立つ．

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

とくに $n=0$ のとき　$\int 1\,dx=\int dx=x+C$

（C：積分定数）

微分法の公式を用いて，関数の定数倍や和の不定積分を求める公式を作ることができる．

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \qquad \int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

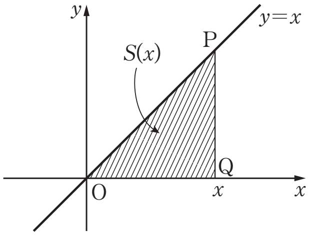
⇒　C&U ①

［2］ 定積分

□直線 $y=x$ と x 軸の間で右の図の斜線部分の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}x^2$$

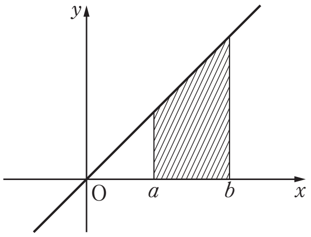
であって，これは関数 $f(x)=x$ の不定積分 $\int x\,dx$ である．



さらに，$0<a<b$ として，右の図のように直線 $y=x$，x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ の囲む面積は

$$S(b)-S(a)$$

に等しい．



この例でみたように，関数 $f(x)$ に対して，その不定積分を $F(x)$ とするとき，

$$F(b)-F(a)\quad\cdots\cdots①$$

の値を考えることは，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積に関連して重要である（後述）．

□$f(x)$ の不定積分は無数にあるが，そのどれをとってもこの①の値は変わらない．例えば，$f(x)$ の 2 つの不定積分 $F(x)$，$G(x)$ の間には， $G(x)=F(x)+C$ （C：定数）という関係があり，

$$G(b)-G(a)=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

であるから，$G(b)-G(a)$ の値は①と一致する．

この①の値を，関数 $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの**定積分**といい，$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ と表す．この定積分において，a を下端，b を上端という．また，この定積分の値を求めることを $f(x)$ を a から b まで**積分する**という． また，①は簡単に $[F(x)]_a^b$ と書ける．

定積分

$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

この定積分の定義により，a，b，c の大小に関わらず次の性質が成り立つ．

定積分の性質

$\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$　　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$　　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

$\displaystyle\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　　$\displaystyle\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

⇒　C&U ②

［3］ 定積分で定義された関数

□定積分 $\int_a^x f(t)dt$ は，x の値を定めるとその値が定まる．よって $\int_a^x f(t)dt$ は x の関数である．この関数の導関数を求めよう．

□$f(t)$ の不定積分を $F(t)$ とすると，定積分の定義により

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

この右辺を x で微分すると　$\{F(x)-F(a)\}' = F'(x) - F'(a) = f(x)$　である．よって次のことが成り立つ．

定積分と導関数

x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ を x で微分すると，$f(x)$ となる．

つまり　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$　である

⇒ C&U ３

【CHECK & UP】

1　次の不定積分を求めよ．

(1) $\int (3x^2-4x+1)dx$　　(2) $\int t(t+1)dt$

2　次の定積分を計算せよ．

(1) $\int_{-1}^{3}(x^2+2x+4)dx$　　(2) $\int_{1}^{3}(2x^3+3x^2-5x+1)dx$

3　$\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$ のとき，$f(x)$ と a の値を求めよ．

< Note >

第31講　微分法・積分法(4)

1　次の定積分の値を求めよ.

(1)　$\displaystyle\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_{1}^{2}(t+1)(t^2-1)\,dt+\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)\,dt$

＜ Note ＞

2　次の定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{3} x|x-2|\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_{0}^{3} |x^2-3x+2|\,dx$

< Note >

3　[1]　x の関数　$f(x)=\int_0^x t(t^2-1)dt$　の極値を求めよ.

[2]　等式　$f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1$　を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

＜ Note ＞

第 31 講　微分法・積分法(4)

[1]　定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx-\int_{2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx$ の値は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ である.

[2]　(1)　等式 $f(x)=3x^2+2-\displaystyle\int_0^2 xf(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ は

$f(x)=\boxed{エ}x^2-\boxed{オ}x+\boxed{カ}$ である.

(2)　等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+2x-3$ を満たす関数 $f(x)$ は $f(x)=\boxed{キ}x+\boxed{ク}$

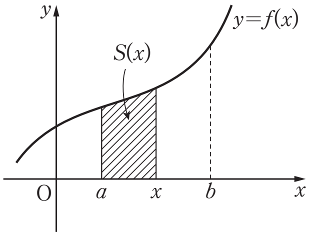
であり，定数 a の値は $a=-\boxed{ケ}$, $\boxed{コ}$ である.

< Note >

第 32 講　微分法・積分法(5)

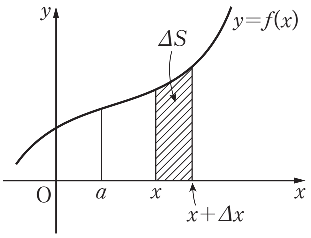
【基礎確認事項】

［１］　面積



定積分を使って実際に面積の計算ができることを示す.

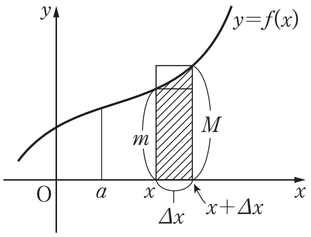
□右図のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ と x 軸の間で x 座標が a から x までの部分の面積を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で x の関数である.
この面積 $S(x)$ が $f(x)$ の不定積分の１つであることを示す.



□ x の増分 Δx に対する面積 $S(x)$ の増分を ΔS とすると

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$$

であり，$\Delta x > 0$ のとき，ΔS は右図斜線部分である.



□ x から $x+\Delta x$ までの区間における $f(x)$ の最大値を M,
最小値を m とし，ΔS を横の長さが Δx，縦の長さが M,
m の２つの長方形の面積と比較すると

$$\Delta x \cdot m \leqq \Delta S \leqq \Delta x \cdot M$$

すなわち　$m \leqq \dfrac{\Delta S}{\Delta x} \leqq M$　……①　である.

　$\Delta x < 0$ のときは　$(-\Delta x) \cdot m \leqq S(x) - S(x+\Delta x) = -\Delta S \leqq (-\Delta x) \cdot M$ より，両辺を
$-\Delta x (>0)$ で割ることにより①を得る.

　①において，$\Delta x \to 0$ とすると

$$m \to f(x) \qquad M \to f(x) \qquad \frac{\Delta S}{\Delta x} \to S'(x) \quad \text{より} \quad f(x) \leqq S'(x) \leqq f(x)$$

すなわち $S'(x) = f(x)$　つまり　$S(x)$ は $f(x)$ の不定積分の１つである.
また，$S(a) = 0$ であることから，x 座標が a から b までの面積 S は

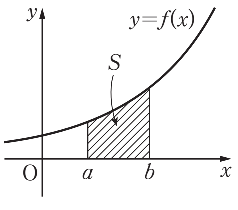
$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

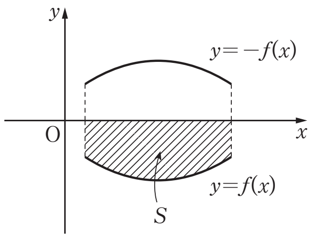
である.

定積分と図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき
$y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の
面積 S は

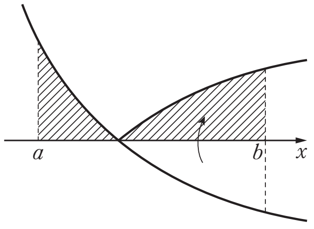
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$





□次に，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ のとき，面積 S は右図のように x 軸に関して対称に移動した図形の面積に等しいので，

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$ である．



□ x が a から b まで変化するときに，$f(x)$ の値が正になったり負になったりする場合は，$f(x) \geqq 0$ の部分はそのまま積分し，$f(x)<0$ の部分は，$-f(x)$ を積分し，それらを合わせると面積となる．

これは，$y=|f(x)|$ と x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分に等しい．よって以下のことがいえる．

> $a<b$ のとき，$y=f(x)$ と x 軸および $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は
>
> $$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

⇒　C&U ① ②

【CHECK & UP】

1 (1) 関数 $y=x^2+1$ のグラフと x 軸，および2直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) 曲線　$y=x(x+1)(x-2)$ と x 軸との囲む2つの部分の面積の和を求めよ．

2 $\int_0^2 |x^2+x-2|dx$ を求めよ．

＜ Note ＞

第 32 講　微分法・積分法(5)

1 (1)　等式 $\displaystyle\int(x-\alpha)^2dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$　（C は定数）　を証明せよ．

(2)　曲線　$y=x^2-2x+1$　と x 軸，および直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

< Note >

2 (1) 等式 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ.

(2) 曲線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

＜ Note ＞

3　$f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|dx$　とするとき，$f(t)$ の最小値と最小値を与える t の値を求めよ．

< Note >

第 32 講　微分法・積分法(5)

(1)　$y=-x^2+2x$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

(2)　$y=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}$ と x 軸，y軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である.

(3)　$f(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}|x-a|dx$ は　$t=a-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のとき　最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる.

< Note >

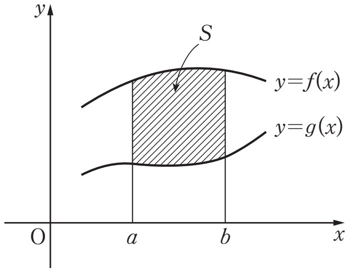
第 33 講　微分法・積分法(6)

【基礎確認事項】

［１］　**２曲線の間の面積**

$a<b$ とし，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる面積 S を定積分で表す．

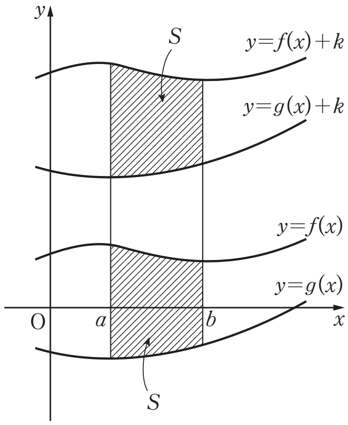
まず区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)\geqq 0$ のときは，求める面積 S は，$a\leqq x\leqq b$ における $y=f(x)$ と x 軸の間の面積から，$y=g(x)$ と x 軸の間の面積を減じたものとして求められるから



$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される．

また，区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)$ であるが，$g(x)$ や $f(x)$ が負の値をとることがあるときは，この区間で常に $g(x)+k\geqq 0$ となるような正の数 k をとる．$f(x)$，$g(x)$ を y 軸方向に k だけ平行移動しても求める図形の面積は変化しないので



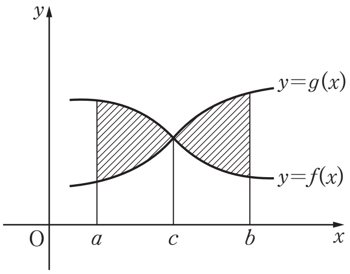
$$S=\int_a^b\{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される．

さらに，区間 $a\leqq x\leqq c$ で $f(x)\geqq g(x)$，区間 $c\leqq x\leqq b$ で $f(x)\leqq g(x)$ のときは

$$S=\int_a^c\{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b\{g(x)-f(x)\}dx$$

表される．

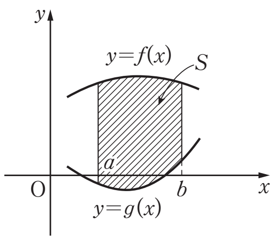


以上より，$f(x)-g(x)$ が 0 以上になる区間と負になる区間に分け，0 以上になる区間は　$f(x)-g(x)$，負になる区間は $g(x)-f(x)=-\{f(x)-g(x)\}$ を積分すればよい．

よって，次のことがいえる．

$a<b$ とし，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる面積 S は

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$



⇒　C&U 1

【CHECK & UP】

1　2 曲線 $y=-x^2+2x+1$, $y=x^2+4x-3$ と 2 直線 $x=-2$, $x=2$ によって囲まれる部分の面積を求めよ.

< Note >

第33講　微分法・積分法(6)

1　(1)　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$，および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ．

(2)　曲線 $y=x^3-4x$ とその曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線とが囲む図形の面積を求めよ．

＜ Note ＞

2　放物線　$y=-x^2+3x$　と x 軸で囲まれた図形の面積が直線 $y=ax$ で2等分されるとき，a の値を求めよ．

＜ Note ＞

3　放物線　$y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ の最小値を求めよ．

< Note >

第33講　微分法・積分法(6)

(1)　2つの曲線 C_1：$y=x^2-x$，C_2：$y=x^2-3x+3$ と直線 l：$y=x-1$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である．

(2)　$m<2$ のとき，直線 $y=mx$ と曲線 $y=-x^2+2x$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{1}{\boxed{\text{エ}}}(\boxed{\text{オ}}-m)^{\boxed{\text{カ}}}$ である．このとき直線 $y=mx$ が，$y=-x^2+2x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を2等分する m の値は　$m=\boxed{\text{キ}}-\sqrt[\boxed{\text{ク}}]{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

< Note >

第 34 講　数列(1)

【基礎確認事項】

［1］　数列の概念

□数を一列に並べたものを**数列**という．以下では，ある規則にしたがって並んでいる数の列を扱う．

偶数の列 2，4，6，8，…… を例に考える．数列のおのおのの数をその数列の**項**といい，はじめから順に第 1 項，第 2 項，第 3 項，…… という．第 1 項は**初項**ともいう．上の例では，初項は 2，第 3 項は 6，第 10 項は 20 である．また，第 n 項をおのおのの項の代表と考えるとき，これを**一般項**という．

□数列を表すには，一般に

$\{a_n\}$：a_1，a_2，a_3，……，a_n，…… と添字をつけて表す．a_1 が初項であり，a_n が第 n 項，すなわち一般項である．

$a_n=2n$ というように一般項 a_n を n の式で表すことができるとき，この n に 1 から順に自然数を代入すると，数列 $\{a_n\}$ の項が順に　2，4，6，8，…… と得られる．

項の数が有限である数列を**有限数列**といい，その項の個数を**項数**，最後の項を**末項**という．これに対し，項の数が無限である数列を**無限数列**という．

［2］　等差数列

奇数を 1 から順に並べると

1，3，5，7，……

となる．これは，初項 1 に 2 を次々に加えていったものである．

□一般に，数列の各項がすぐ前の項に一定の数 d を加えて得られるとき，この数列を**等差数列**といい，その一定の数 d を**公差**という．上の例では $d=2$ である．

□初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の各項は順に

$a_1=a$，$a_2=a+d$，$a_3=a+2d$，…… であり，その一般項 a_n は

$$a_n=a+(n-1)d$$

と表される．

またその定義から，数列 $\{a_n\}$ が等差数列であることを示すには

$a_{n+1}-a_n=d$（d は一定）（$n=1$，2，3，……）が成り立つことを示せばよい．

□等差数列 a，b，c において，この 3 項の中央の項 b を**等差中項**という．これについて，次が成り立つ．

数列 a，b，c が等差数列　$\Longleftrightarrow$　$2b=a+c$

□初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}\quad\cdots\cdots①$$

である．

この数列の末項を l とし，逆の順に l から並べた数列は，初項 l，公差 $-d$ の等差数列である．その和 S_n は

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+\{l-(n-1)d\} \quad \cdots\cdots②$$

と表される．①＋② より

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)=n(a+l)$$

であることより，

$$\boxed{S_n=\frac{n(a+l)}{2}}$$

が得られる．また，$l=a+(n-1)d$ であるから

$$\boxed{S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}}$$

である．

⇒　C&U 1

[３]　等比数列

数列 1，2，4，8，……　は，初項 1 に 2 を次々にかけていったものである．

□一般に，数列の各項がすぐ前の項に一定の数 r をかけて得られるとき，この数列を**等比数列**といい，その一定の数 r を**公比**という．上の例では $r=2$ である．

□初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の各項は順に

$a_1=a$，$a_2=ar$，$a_3=ar^2$，…… であり，その一般項 a_n は

$$\boxed{a_n=ar^{n-1}}$$

と表される．

またその定義から，数列 $\{a_n\}$ が等比数列であることを示すには

$a_{n+1}=ra_n$（r は一定）（$n=1$，2，3，……）が成り立つことを示せばよい．

□等比数列 a，b，c において，この 3 項の中央の項 b を**等比中項**という．これについて，次が成り立つ．

$$\boxed{\text{数列 } a,\ b,\ c \text{ が等比数列} \iff b^2=ac}$$

□項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を S_n とすると

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

である．

①の両辺に r をかけて

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n \quad \cdots\cdots②$$

①－②より

$S_n-rS_n=a-ar^n$　　ゆえに　$(1-r)S_n=a(1-r^n)$

したがって

| $r \neq 1$ のとき　　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ |

である.

$r>1$ のときは $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ を, $r<1$ のときは $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ を用いるとよい. また, $r=1$ のときは　①より $S_n=a+a+\cdots\cdots+a$ (n 個) である.

したがって　$r=1$ のとき　　$S_n=na$

⇒ C&U ②

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 (1) 第10項が28，第40項が148である等差数列の初項と公差を求めよ．また，192はこの数列の第何項か．

(2) 公差3，末項43，項数20の等差数列の和を求めよ．

2 (1) 第4項が -54，第7項が1458である等比数列の初項と公比を求めよ．また，-486 はこの数列の第何項か．

(2) 初項3，公比2の等比数列の初項から第 n 項までの和が93であるとき，項数 n を求めよ．

＜ Note ＞

第 34 講　数列(1)

1　第 10 項が 230，第 25 項が -220 の等差数列について，次の問いに答えよ．

(1)　初項と公差を求め，一般項を n を用いて表せ．

(2)　初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ．

(3)　初項から第 n 項までの和の最大値と，それをとる n を求めよ．

＜ Note ＞

2　等比数列 $\{a_n\}$ において，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3,\quad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ．

< Note >

3 [1]　2つの正の数 a，b がある．a と b の間に1つの数 m を入れて，a，m，b がこの順に等差数列，等比数列をなすような m の値をそれぞれ求めよ．

[2]　3次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ が3つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする．α，β，γ はある順で等差数列となり，またある順で等比数列となる．このとき，実数 a，b，α，β，γ の値を求めよ．

＜ Note ＞

第 34 講　数列(1)

(1)　第 10 項が -20，第 20 項が -50 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=-$ ア $n+$ イウ である．よって　-110 は数列 $\{a_n\}$ の第 エオ 項であり，

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和の最大値は カキ である．

(2)　公比が実数である等比数列 $\{a_n\}$ において，$a_6+a_7+a_8=3$，$a_9+a_{10}+a_{11}=-\dfrac{3}{8}$ が成り立つ．このとき　$a_{10}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である．

＜ Note ＞

第35講　数列(2)

【基礎確認事項】

［1］　和の記号Σ

□数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ を表すのに，記号Σ(シグマ)を用いて $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_k}$ と書く．

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

例　$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}$ は初項1，公比2，項数 n の等比数列の和より $\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$ である．すなわち，$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n-1$ である．

□また，$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ は

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

と表すことができるが，他にも $\sum_{k=2}^{6}(k-1)^2$ や $\sum_{k=0}^{4}(5-k)^2$ など様々な表し方がある．

□$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，初項1，末項 n，項数 n の等差数列の和より $\dfrac{n(1+n)}{2}$ である．すなわち $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{1}{2}n(n+1)}$ である．

Σについては，一般に次の等式が成立する．

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \sum_{k=1}^{n} c = nc$$

□$\sum_{k=1}^{n} k^2$ を求めよう．恒等式　$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ において，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ とすると

$k=1$ のとき　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき　$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

これらを辺々加えると

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+1\cdot n$$

$$=3\sum_{k=1}^{n} k^2+3\sum_{k=1}^{n} k+n$$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ であることより，

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - (n+1) - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2 - 2 - 3n\} = \frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって　$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$

⇒　C&U 1

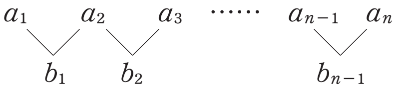
［２］　階差数列

□数列 $\{a_n\}$ に対して，それぞれの項からすぐその前の項を引いた差をとって

$a_{n+1} - a_n = b_n$ （$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）

とおくとき，数列 $\{b_n\}$ をもとの数列 $\{a_n\}$ の

階差数列という．



$a_2 - a_1 = b_1$ より　$a_2 = a_1 + b_1$

同様に $a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2$，$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3$ であり

$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1})$　である．

よって　$n \geqq 2$ のとき

$\boxed{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$　である．

⇒　C&U 2

【CHECK & UP】

1　次の和を求めよ.

(1) $\sum_{k=1}^{n}(4k-3)$　(2) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$　(3) $\sum_{k=1}^{n}2^k$

2　次の数列の第 n 項を求めよ.

(1) $\{a_n\}$：1, 3, 6, 10, 15, 21, ……　(2) $\{a_n\}$：2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, ……

＜ Note ＞

第35講　数列(2)

1 [1]　恒等式　$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示せ.

[2]　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(1)　1，1＋2，1＋2＋3，……

(2)　1，1＋2，1＋2＋4，……

(3)　$1\cdot n$，$2\cdot(n-1)$，$3\cdot(n-2)$，……，$(n-1)\cdot 2$，$n\cdot 1$

< Note >

2　次の和を求めよ.

(1)　$1\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 2^2+10\cdot 2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot 2^{n-1}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

< Note >

3　次の数列の一般項を求めよ.

1, 2, 4, 10, 23, 46, 82, 134, ……

＜ Note ＞

第 35 講　数列(2)

(1)　数列 $1\cdot n,\ 3\cdot(n-1),\ 5\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ (2n-3)\cdot 2,\ (2n-1)\cdot 1$　の和は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}n(n+1)(\boxed{\text{イ}}\,n+1)$$　である.

(2)　数列 $\dfrac{1}{2\cdot 5},\ \dfrac{1}{5\cdot 8},\ \dfrac{1}{8\cdot 11},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$　の和は

$$\frac{n}{\boxed{\text{ウ}}(\boxed{\text{エ}}\,n+\boxed{\text{オ}})}$$　である.

(3)　数列 $\{a_n\}$：5，7，11，19，35，…… の一般項は　$a_n=\boxed{\text{カ}}^{\,n}+\boxed{\text{キ}}$　である.

< Note >

第 36 講　数列(3)

【基礎確認事項】

[１]　数列の和と一般項

□初項 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_1=a_1$ であり，

$$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

$$S_n\ \ =a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$$

である．よって $n\geqq 2$ のとき $S_n=S_{n-1}+a_n$ である．

したがって，

$a_1=S_1$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

⇒　C&U ①

[２]　群数列

□数列をある規則に従って群に分けたとき，その数列を**群数列**という．

例　　第１群　第２群　　第３群　　　　　第４群

1　| 3，5 | 7，9，11 | 13，15，17，19 | 21，…

この例において，第４群の初項は 13，末項は 19，項数は 4 である．

□群数列においては，特に各群の項数が問題を解く手がかりとなる．この各群の項数に加え，群に分ける前の数列の規則性，もしくは群の分け方の規則性に注目し，第 n 群の初項，末項などを求めながら問題を解き進めていくとよい．

⇒　C&U ②

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=-3n^2+6n$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

2　奇数の数列 1，3，5，7，9，11，13，15，…… を，
1 | 3，5 | 7，9，11 | 13，15，17，19 | 21，…… のように，第 n 群が n 個の項を含むように分ける．このとき，第 n 群の最初の項と最後の項を求めよ．

＜ Note ＞

第36講　数列(3)

1

(1)　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ について，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-3$ であるとき，a_n の一般項を求めよ.

＜ Note ＞

2　正の奇数を小さい順に並べた数列を，次のように第 n 群に $2n-1$ 個の項を含むように分ける．

$$1 \mid 3,\ 5,\ 7 \mid 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17 \mid 19,\ \cdots\cdots$$

このとき次の問いに答えよ．

(1)　第 n 群の最初の数を n を用いて表せ．

(2)　第 n 群の総和を n を用いて表せ．

(3)　777 は第何群の何番目にある数か．

＜ Note ＞

3　次の数列について，次の問いに答えよ．

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{1}{6}$，……

(1)　$\frac{7}{18}$ は第何項になるか．

(2)　第 200 項を求めよ．

(3)　初項から第 200 項までの総和を求めよ．

＜ Note ＞

第36講　数列(3)

[1]　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=4n^2-3n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の初項は $a_1=$ [ア] である．また一般項は　$a_n=$ [イ] $n-$ [ウ] である．

[2]　分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列を考える．

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

(1)　この数列において，$\frac{7}{18}$ は第 [エオカ] 項である．

(2)　第 99 項は $\frac{[キ]}{[ク]}$ である．

＜ Note ＞

第 37 講　数列(4)

【基礎確認事項】

［１］　**漸化式**

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$ で定義される数列を考えよう．

$a_2=3a_1+1=3\cdot1+1=4$

$a_3=3a_2+1=3\cdot4+1=13$

$a_4=3a_3+1=3\cdot13+1=40$

これを繰り返すと，この数列のすべての項が順に定義される．

□このように数列 $\{a_n\}$ のはじめの項，またははじめのいくつかの項と，これらをもとにして順に次の値を定めるための規則を与えると，この数列のすべての項を順に定義することができる．これを**帰納的定義**という．

□上の例においては $a_{n+1}=3a_n+1$ によって規則が定められる．このように，前の項から次の項を順次定める関係式を**漸化式**という．

公差 d の等差数列は，$a_{n+1}=a_n+d$　の形の漸化式

公比 r の等比数列は，$a_{n+1}=ra_n$　の形の漸化式

で表される．

⇒　C&U ① ②

［２］　**漸化式の基本的な形**

□$a_{n+1}=a_n+f(n)$（n の式）　の形の漸化式は，　数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $f(n)$ である．よって $f(n)$ の和を求めることができれば，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる．

□$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式は，$\alpha=p\alpha+q$ を満たす α を考えることにより，辺々引いて $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ の形に変形することができる．すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ が初項 $a_1-\alpha$，公比 p の等比数列となり，$\{a_n-\alpha\}$ の一般項がわかる．これにより数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる．漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ に対して，$\alpha=p\alpha+q$ を**特性方程式**という．

上記のように，与えられた漸化式の形により，適切な変形をすることで一般項を求めることができるものがあり，多くの問題で典型的な漸化式の形とその解法を身につける必要がある．その一方で，漸化式は一般項を求めるためだけに存在する式ではなく，帰納的に項を順次出すことのできる式であることを忘れてはならない．

⇒　C&U ③

【CHECK & UP】

1　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3$　で定められる数列 $\{a_n\}$ において，a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ．

2　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2$　　(2)　$a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n$

3　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n+1$

＜ Note ＞

第 37 講　数列(4)

1　次の条件によって与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=6$

(2)　$a_1=2,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n-3n+1$

(4)　$a_1=-2,\ 4a_{n+1}=5a_n+4$

＜ Note ＞

2　次の条件によって与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$　　(2)　$a_1=1,\ na_{n+1}=2(n+1)a_n$

＜ Note ＞

3　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=3a_n+2b_n$ で定める．

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α，β の組を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

＜ Note ＞

第 37 講　数列(4)

(1)　$a_1=2$, $a_{n+1}-a_n=n+1$　のとき　$a_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}(n^2+n+\boxed{\text{イ}})$　である.

(2)　$a_1=2$, $2a_{n+1}=a_n+1$　のとき $a_n=\left(\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^{n-1}+\boxed{\text{エ}}$　である.

(3)　$a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+4}$　のとき　$a_n=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}\cdot\boxed{\text{キ}}^{n-1}-\boxed{\text{ク}}}$ である.

< Note >

第 38 講　数列(5)

【基礎確認事項】

［1］　数学的帰納法

□ある命題が任意の自然数 n に対して成り立つことを，無数にある自然数１つ１つについて確かめていくことは不可能である．

　そこで，先に学んだ帰納的定義と同じように，ある命題がすべての自然数 n について順々に成り立つことを確かめる一般的な方法として，**数学的帰納法**という証明法がある．その手順の１つが以下である．

自然数 n に関するある命題 $P(n)$ に関して

［Ⅰ］　$n=1$ のとき　命題 $P(n)$ が成り立つ．
［Ⅱ］　任意の自然数を k として，$n=k$ のとき命題 $P(k)$ が成り立つことを仮定すると，$n=k+1$ のときも命題 $P(k+1)$ が成り立つ．

［Ⅰ］［Ⅱ］により，$n=1$ から順に $n=2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のときに命題 $P(n)$ が成立する．したがって，命題 $P(n)$ がすべての自然数 n に関して成り立つ．

数学的帰納法は，直接証明しにくい自然数 n を含む命題を証明するのに有用である．

⇒　C&U ①

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　すべての自然数 n について，$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$　……①
が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

< Note >

第 38 講　数列(5)

1 ［1］　n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$$

［2］　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

< Note >

2　[1]　n を自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqq 2 - \frac{1}{n}$$

[2]　n が自然数のとき，不等式　$n! \geqq 2^{n-1}$　が成り立つことを示せ．

＜ Note ＞

3 ［1］ $a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 を求め，一般項 a_n を推定せよ．

(2) (1)で求めた一般項 a_n が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

［2］ $a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．すべての自然数 n について $a_n>1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

＜ Note ＞

第38講　数列(5)

n を自然数とする．$n \geqq 5$ のとき　$2^n > n^2$　……①　であることを数学的帰納法で証明したい．

$n=5$ のとき　(①の左辺)＝ アイ ，　(①の右辺)＝ ウエ より　①は成り立つ．

$n=k(\geqq 5)$ のとき　①が成り立つ，つまり　$2^k > k^2$ が成り立つと仮定する．

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$

ここで　$k \geqq 5$ のとき

$2k^2 - (k+1)^2 = (k -$ オ $)^2 -$ カ $\geqq$ キク > 0　より

$2^{k+1} > (k+1)^2$　　よって　$n=k+1$ のときも①は成立する．

以上より，5以上のすべての自然数 n で　$2^n > n^2$　が成立する．

< Note >

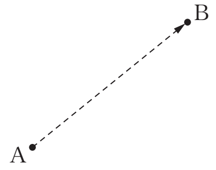
第 39 講　平面ベクトル(1)

【基礎確認事項】

［1］　ベクトルの概念と表記

いままで扱ってきた量は，大きさだけを考えてきた．ところが大きさだけでは表すことのできない量もある．例えば平面上を点が移動するとき，その移動量を表してみよう．

□平面上の A にあった点が同じ平面上の B まで移動する場合を考える．



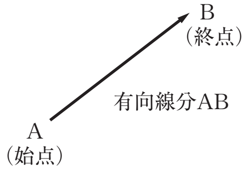
このとき，途中どのような点を通ったかは問題にせず，とにかく A から B まで移動したという結果だけを考える．

この移動を表すのに，AB の間の距離だけではこの移動を表すことは不可能で，どの方向に移動したかということも必要となってくる．

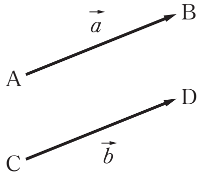
このように，大きさだけでなく，**大きさと方向**で表す量を**ベクトル**という．これに対し，**大きさだけ**で表すことができる量を**スカラー**という．

例　長さ，面積，体積などは，大きさだけを考える量であるからスカラーである．

□平面上を点が A から B まで移動したことを表すのに，A を始点，B を終点とする有向線分を用いるとよい．これを記号で表すと $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ である．または簡単に $\vec{a}$ などと表すこともできる．



□ベクトルは大きさと方向だけを考える量である．よってその位置は問題ではない．したがって，線分 AB と線分 CD が平行で，その大きさと向きが等しければ，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は**等しい**ベクトルであるとみなす．これを　$\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ や $\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ と表す．



等しいベクトルは，平行移動して重ねあわせることができる．

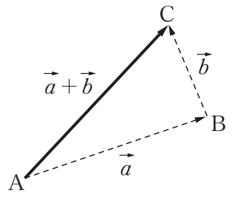
□また，線分 AB の長さを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**大きさ**といい，絶対値記号を用いて $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$ と表す．大きさが 1 のベクトルをとくに**単位ベクトル**という．

⇒　C&U 1

［2］　ベクトルの演算

□ 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**和**を次のように定義する．

点 A を始点とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ となる終点 B をとり，さらに点 B を始点として $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}$ となる終点 C をとる．

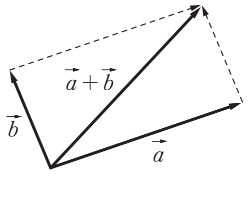


このとき

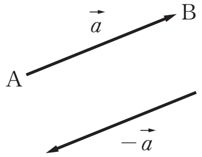
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{b}$$

である．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の対角線と考えてもよい．



□$\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが反対のベクトルを $\vec{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\vec{\boldsymbol{a}}$ で表す．すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ である．



□$\vec{a}+(-\vec{a})$ を計算すれば，その結果は大きさのない点だけということになる．これを**零ベクトル**といい，$\vec{0}$ と表す．

例 $\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$ である．

いうまでもなく $|\vec{0}|=0$ であり，また零ベクトルについてはその向きは考えない．

零ベクトルには，次の性質がある．

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$　　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

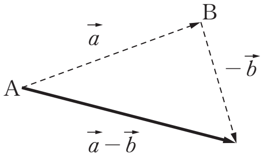
□2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**差**を次のように定義する．

点Aを始点とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ となる終点Bをとり，さらに点Bを始点として $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{b}$ となる終点Cをとる．

このとき

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$

である．

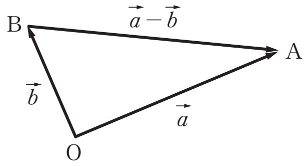


$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差は，次のように定義してもよい．

Oを始点として $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ となるようにA，Bをとると

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

つまり $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}$ である．



□$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}$ の実数倍 $k\vec{\boldsymbol{a}}$ を次のように定義する．

[1] $k>0$ のとき　$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

[2] $k<0$ のとき　$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

[3] $k=0$ のとき　$\vec{0}$

また，$k\vec{0}=\vec{0}$ である．

□したがって，次のことがいえる．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k が存在する

また，$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは $\pm\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と表される．

ベクトルの演算法則をまとめると次のようになる．

> $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$（交換法則）　　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$（結合法則）
> k，l が実数のとき
> $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$　　$(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

以上の性質により，ベクトルの加法，減法，実数倍の計算では，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ などの式を a，b の式と同じように扱うことができる．

⇒　C&U ② ③

［3］　ベクトルの分解と成分表示

□平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}\,/\!\!/\,\vec{b}$ でないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は**1次独立**であるという．

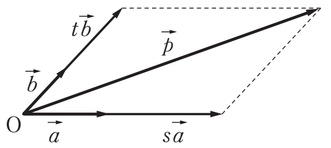
□平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が1次独立であるとき，この平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ および実数 s，t を用いて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

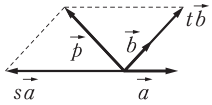
とただ1通りに表すことができる．

$\vec{p}=\vec{0}$ のときは　$s=0$，$t=0$ である．

このように，平面上の任意のベクトルは，平行でない2つの方向に分解することができる．



$s>0$，$t>0$



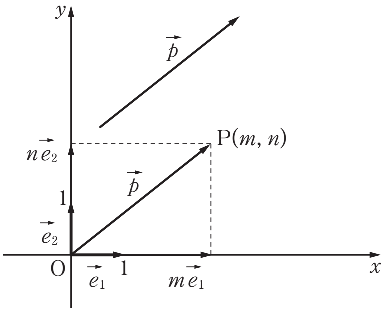
$s<0$，$t>0$

□Oを原点とする座標平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，x 軸方向，y 軸方向の正の向きの単位ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いて表すことができる．

原点Oを始点とする，$\vec{p}$ に等しいベクトルの終点をPとする．このときの点Pの座標を $(m,\ n)$ とすると，

$$\vec{p}=m\vec{e_1}+n\vec{e_2}\quad\cdots\cdots①$$

である．つまり，$\vec{p}$ が与えられると，①を満たす実数の組 $(m,\ n)$ がただ1つ定まる．逆に，実数の組 $(m,\ n)$ が与えられると，①を満たす $\vec{p}$ がただ1つ定まる．このとき，$\vec{p}$ を



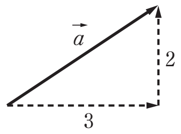
$$\vec{p}=(m,\ n)\quad\cdots\cdots②$$

と表す．②における m を $\vec{p}$ の **x 成分**，n を $\vec{p}$ の **y 成分**といい，②を $\vec{p}$ の**成分表示**という．

□x 軸上，y 軸上の単位ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ をとくに基本ベクトルという．基本ベクトルを成分を用いて表すと　$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$ である．

□成分表示されたベクトルは，x 軸方向，y 軸方向の移動量を表す．
また，成分表示されたベクトルの大きさについて次のことがわかる．

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$



$\vec{a}=(3,2)$

$|\vec{a}|=\sqrt{13}$

成分表示された2つのベクトルについて，次のことが成り立つ．

成分表示されたベクトルの相等，和，差，実数倍

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$　のとき

$\vec{a}=\vec{b}\iff a_1=b_1$　かつ　$a_2=b_2$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

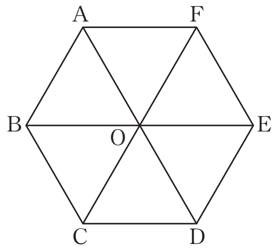
$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　（k は実数）

⇒　C&U 4

【CHECK & UP】

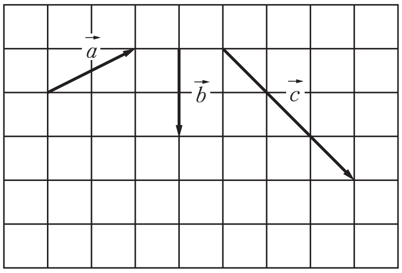
1　右の図は1辺の長さが1の正六角形でその中心をOとする．この図の中で，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ に等しいベクトルをすべて求めよ．また，$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ を求めよ．



2　3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が右の図のように与えられているとき，次のベクトルを図示せよ．

(1)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$2\vec{b}-\vec{c}$

(3)　$2(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}$　　(4)　$-2\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$



3　$\vec{p}=-5\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ のとき，次のベクトルを $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表せ．

(1)　$\vec{a}$　　(2)　$\vec{b}$　　(3)　$-3\vec{a}+4\vec{b}$

4　$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ．

(1)　$\vec{a}+2\vec{b}$　　(2)　$2\vec{a}-3\vec{b}$

＜ Note ＞

第39講　平面ベクトル(1)

1　正六角形 ABCDEF において，その中心を O，線分 OC の中点を G，線分 OE を 2：1 に内分する点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

< Note >

2 ［1］ $\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ．

⑴ k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく．$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{2}$ となるような k の値を求めよ．また，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ．

⑵ $\vec{c}=(5,\ 4)$ を $x\vec{a}+y\vec{b}$ の形で表せ．

［2］ 3 点 A$(1,\ 2)$，B$(3,\ 5)$，C$(4,\ 8)$ について，次の問いに答えよ．

⑴ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を成分で表し，その大きさを求めよ．

⑵ D$(x,\ y)$ とする．四角形 ABCD が平行四辺形になるように x，y の値を定めよ．

＜ Note ＞

3　(1)　$|\vec{a}|=3$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ.

(2)　$\vec{a}=(x,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ -3)$ において, $\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行であるとき, 実数 x の値を求めよ. また, このとき $|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ.

< Note >

第39講　平面ベクトル(1)

(1)　平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 2：1 に内分する点を E とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とすると，$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=\vec{a}-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}$ である．

(2)　$\vec{a}=(-1,\ 7)$，$\vec{b}=(8,\ -11)$，$\vec{c}=(2,\ 1)$ のとき，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ となる実数 m，n は $m=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$n=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．また，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になる実数 t の値は $t=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．

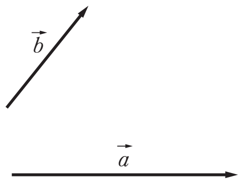
＜ Note ＞

第 40 講　平面ベクトル(2)

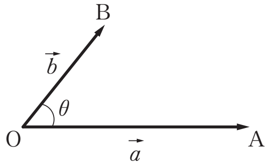
【基礎確認事項】

［１］　ベクトルの内積

□平面上に $\vec{0}$ ではない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとき，この平面上に点 O をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ となるように点 A，B をとる．このとき，∠AOB の大きさ θ を 2 つのベクトルの**なす角**という．ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180°$ とする．



□このとき，ベクトルの**内積** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を次のように定義する．



> **ベクトルの内積**
> $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

とくに $\vec{a}=0$　または　$\vec{b}=0$ のときは　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　である．
ベクトルの内積はスカラーになる．

⇒　C&U ①

［２］　内積と成分表示

□成分表示された 2 つのベクトル　$\vec{a}=(a_1,\ b_1)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を成分を用いて表してみよう．

　O を始点として　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$　となるように A，B をとり，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$　とする．

　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta$　……①

また，△OAB において余弦定理より

　$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta$　より

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2}$$

$$=\frac{(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-\{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\}}{2}$$

$$=a_1b_1+a_2b_2 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より次のことがいえる．

> **内積と成分**
> $\vec{a}=(a_1,\ b_1)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とするとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

また，内積の定義から次のことが成り立つ．

　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ がともに $\vec{0}$ でないとき，なす角 θ について

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

また，$\cos\theta=0$　つまり　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\perp\vec{b}$ と表し，以下が成り立つ．

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

⇒　C&U 2

［3］　内積の演算法則

ベクトルの内積について，次の法則が成り立つ．

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \qquad (m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(m\vec{b})$$

各自，内積の定義，および成分表示されたベクトルを用いて証明してみよ．

⇒　C&U 3

【CHECK & UP】

1　2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさ　がそれぞれ $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$ である．$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が次の(1)〜(4)のとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を求めよ．

(1)　60°　　(2)　90°　　(3)　135°　　(4)　180°

2　2つのベクトル　$\vec{a}=(2,\ 10)$, $\vec{b}=(9,\ 6)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．　　(2)　$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を求めよ．

3　次の等式を証明せよ．

(1)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

＜ Note ＞

第40講　平面ベクトル(2)

1 (1) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ が $\theta=60^\circ$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) 1辺の長さが2である正方形ABCDにおいて，次の内積を求めよ．

(i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　(iii) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}$　(iv) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}$

< Note >

2 [1]　p を正の数とし，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(1,\ -p)$ があるとする．いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60°$ であるとき，p の値を求めよ．

[2]　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ．

< Note >

3　ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ．

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるように実数 t の値を定め，その最小値を求めよ．

＜ Note ＞

第 40 講　平面ベクトル(2)

(1)　ベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ -\sqrt{3})$ において，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-$ **ア** $\sqrt{\text{イ}}$，
$|\vec{a}|=$ **ウ**，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は **エオカ**°である．

(2)　ベクトル $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-$ **キ** である．

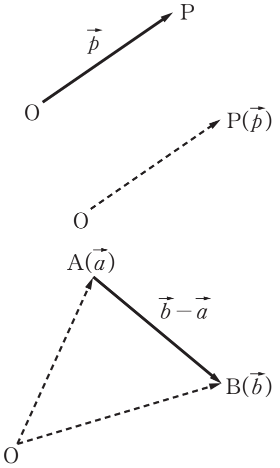
(3)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値は $t=\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ であり，そのときの最小値は $\sqrt{\text{コ}}$ である．

< Note >

第 41 講　平面ベクトル(3)

【基礎確認事項】

［1］ 位置ベクトル



□座標平面の原点を O とすると，平面上の任意の点 P の位置は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ で決まる．このように，ある固定された点を始点とする有向線分で表されるベクトルを，その点に関する点 P の**位置ベクトル**という．

始点はどの点でもよいが，特に断らない限り以下では点 O に関する位置ベクトルを扱う．位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を $\mathbf{P}(\vec{p})$ と表す．

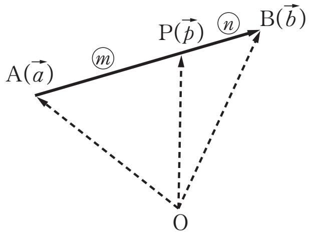
例　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

□点 A の座標は，O に関する点 A の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の成分である．

［2］ 分点を表す位置ベクトル

□$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると



$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\quad \text{である．}$$

したがって，$\boxed{\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}}$ である．

同様に，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$\boxed{\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}}$ と表される．

⇒ C&U 1

［3］ 共線条件

□平面上の 3 点 A，B，C において，次のことが成り立つ．

共線条件
3 点 A，B，C が同一直線上にある　$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　となる実数 k が存在

例　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+3\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$　のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より　点 C は直線 AB 上にある．

つまり，3 点 A，B，C は同一直線上にある．

⇒ C&U 2

【CHECK & UP】

1　A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB を次のように分ける点の位置ベクトルを求めよ．

(1)　2：5 に内分する点 P　　(2)　1：3 に外分する点 Q

2　$\overrightarrow{OA}=-2\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=4\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+4\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=6\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{OE}=-2\vec{a}-6\vec{b}$ であるとき，次のことを証明せよ．ただし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立である．

(1)　3点 O，A，B は一直線上にある．

(2)　AC∥BD

(3)　3点 B，D，E は一直線上にある．

< Note >

第41講　平面ベクトル(3)

1 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC を 2：3 に内分する点を D，辺 BC を 1：2 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△AED の重心を G′ とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 G，点 G′ の位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ であることを証明せよ．

＜ Note ＞

2　△ABC と点 P に関して，等式 $6\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1)　点 P の位置を答えよ．

(2)　面積比 △PBC：△PCA：△PAB を求めよ．

＜ Note ＞

3	平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 1：2 に内分する点を E，対角線 BD を 3：2 に内分する点を F とする．このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ．

＜ Note ＞

第41講　平面ベクトル(3)

△ABC と点 P に対して，等式　$5\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立つとき，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ウエ}}=\dfrac{\boxed{ア}+\boxed{イ}}{\boxed{ウエ}}\cdot\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ア}+\boxed{イ}}$ と変形できる．$\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ア}+\boxed{イ}}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと，点 Q は辺 BC を $\boxed{イ}:\boxed{ア}$ に内分する点であり．点 P は線分 AQ を $\boxed{オ}:\boxed{カ}$ に内分する点である．また面積比 △PBC：△PCA：△PAB＝$\boxed{キ}:\boxed{ク}:\boxed{ケ}$ である．

< Note >

第42講　平面ベクトル(4)

【基礎確認事項】

［1］　共線条件の応用

□共線条件より

点Cが直線AB上にある　$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$　となる実数kが存在する

といえる．$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$　となる点A，B，Cを考える．

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\quad よって\quad \overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$$

$1-k=s$，$k=t$　とおくと　$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$s+t=1$　となる．

また，線分ABを$m：n$に内分する点をCとすると，

$$\overrightarrow{OC}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$$

である．ここで $\dfrac{m}{m+n}=k$ とおくと，$\dfrac{n}{m+n}=1-k$　である．よって

$$\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$$

が成り立つ．また，$\dfrac{n}{m+n}=s$，$\dfrac{m}{m+n}=t$　とおくと，

$$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\quad s+t=1$$

となる．これは外分においても同様である．

したがって，以下のことが成り立つ．

> 点Cが直線AB上にある（点Cが線分ABを内分，または外分する点である）
> $\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$
> $\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$
> $\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$s+t=1$

⇒　C&U ①

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　△ABC において　$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$ で表される点 P がある．直線 AP と直線 BC の交点を Q とする．$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ とおくとき，点 Q が直線 BC 上にあるときの実数 k の値を求めよ．また，点 Q は線分 BC をどのような比で分ける点かを答えよ．

＜ Note ＞

第42講　平面ベクトル(4)

1 [1]　△OABの2辺OA，OBをそれぞれ3：1，4：1に内分する点をそれぞれC，Dとし，BCとADの交点をP，CDとOPの交点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

[2]　△ABCの辺ABを2：1に内分する点をD，辺BCの中点をMとし，AMとCDの交点をEとする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$　とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

< Note >

2　1辺の長さが1の正六角形ABCDEFにおいて，辺BCの中点をGとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$とする．

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{FG}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(2)　点Hを辺DE上の点とする．$\overrightarrow{AH}$と$\overrightarrow{FG}$が垂直であるとき，$\overrightarrow{AH}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

(3)　(2)のときAH，FGの交点をIとする．$\overrightarrow{AI}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．

< Note >

3 (1) △OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ のとき，△OAB の面積 S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(2) △OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，△OAB の面積 S を a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ.

(3) A(0, 0)，B(1, 2)，C(3, 4) を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ.

＜ Note ＞

第42講　平面ベクトル(4)

三角形ABCにおいて，辺BCを3：2に内分する点をD，辺ACを2：1に内分する点をE，線分ADと線分BEの交点をFとする．

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AC}$　であり，A，F，Dは一直線にあるので，$\overrightarrow{AF}$は実数

kを用いて　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}k\overrightarrow{AC}$　……①　と表せる．

また，BF：FE$=t:(1-t)$とおくと，

$\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}t\overrightarrow{AC}$　……②　と表せる．

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$は1次独立より，①，②から　k，tを求めることができる．したがって，

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{キク}}\overrightarrow{AC}$　である．

< Note >

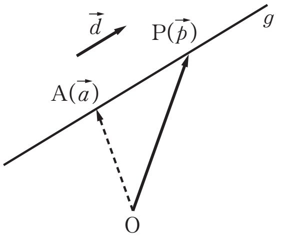
第 43 講　平面ベクトル(5)

【基礎確認事項】

[１]　直線のベクトル方程式

直線の方程式は，通る１点と傾きがわかればただ１つに決まる．これをベクトルで表現することを考える．

□点 $A(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線 g 上の点 $P(\vec{p})$ は，



$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　……①　（t は実数）

と表すことができる．

①の t がすべての実数をとるとき，点 $P(\vec{p})$ の描く軌跡は直線 g 全体になる．

この①を直線 g の**ベクトル方程式**といい，実数 t を**媒介変数**，$\vec{d}$ を直線 g の**方向ベクトル**という．

□ここで２点 A，P の座標を $A(x_1,\ y_1)$，$P(x,\ y)$ とし，ベクトル $\vec{d}=(l,\ m)$ とする．①を成分で表してみよう．$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ より

$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(l,\ m)$

となる．よって，直線 g の方程式は

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

と表すことができる．この②を直線 g の**媒介変数表示**という．

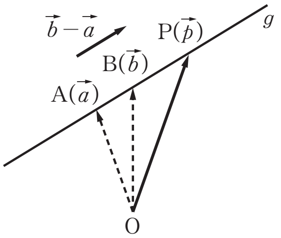
さらに $l\neq0$ のとき，②から媒介変数 t を消去し整理すると

$$y=\frac{m}{l}(x-x_1)+y_1 \quad \cdots\cdots③$$

となる．この③は，$A(x_1,\ y_1)$ を通る，傾き $\frac{m}{l}$ の直線の方程式を表す．一方，方向ベクトル $\vec{d}=(l,\ m)$ は $l=0$ をとりうることに注目したい．$l=0$ のときは，②は直線 $x=x_1$ を表す．

⇒　C&U 1

□２点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を通る直線 g のベクトル方程式は，その方向ベクトルが $\vec{b}-\vec{a}$ であることから，①より



$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$　つまり　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

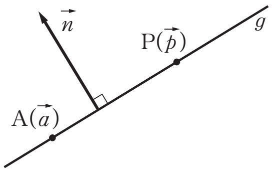
と表される．これは点 P が線分 AB を $t:1-t$ に内分，または外分する点であることを表している．

さらに，$1-t=s$ とおくと

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$　（s，t は実数）

と表すことができる．

⇒　C&U 2



□点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線 g のベクトル方程式は，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$　より　$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$　……④

と表される．ここで点 A，P の座標を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，ベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ とすると，$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1)$ より

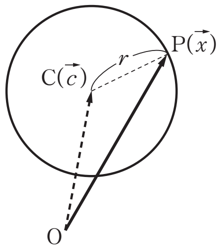
④から　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$　つまり　$ax+by-(ax_1+by_1)=0$　と表される．

よって次のことが言える．

直線 $ax+by+c=0$ はベクトル $(a,\ b)$ に垂直である．

⇒　C&U 3

［2］　円のベクトル方程式



□点 $\mathrm{C}(\vec{c})$ を中心とし，半径を r とする円の方程式は，円周上のどんな点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に対しても　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$ であることから

$|\vec{p}-\vec{c}|=r$　と表される．

このことから $|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$　より　$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$

と表される．

⇒　C&U 4

【CHECK & UP】

1　点 A(3, 4) を通り，ベクトル $\vec{d}=(3,\ -1)$ に平行な直線の方程式を，媒介変数 t を用いて表せ．

2　2 点 A(1, 2)，B(−1, 3) を通る直線の方程式を媒介変数 t を用いて表せ．

3　点 A(6, −3) を通り，$\vec{n}=(-1,\ 2)$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

4　平面上の △OAB と任意の点 P に対し，$|5\overrightarrow{\mathrm{OP}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$ は円を表す．どのような円かを答えよ．

< Note >

第43講　平面ベクトル(5)

1 (1)　点A$(-2,\ 1)$を通り，直線$3x-5y+4=0$に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ．

(2)　法線ベクトルを利用し，2直線$3x+y+6=0$と$x+2y-5=0$のなす鋭角を求めよ．

＜ Note ＞

2 (1)　2点 A(3, 0), B(1, 4) を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ.

(2)　△OAB において, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ とする. 点 A で直線 OA に接する円の中心 C が ∠AOB の二等分線 g 上にある. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき, $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ.

< Note >

3　△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　とする．実数 s，t が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか．O，A，B を適当にとって図示せよ．

(1)　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{3}=1$

(2)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$，$1\leqq s+t\leqq 2$

< Note >

第 43 講　平面ベクトル(5)

点 A(4, 5) から直線 l : $x+2y-6=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする．このとき，点 H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めたい．

直線 l の法線ベクトルの 1 つを $\vec{n}=(1,$ [ア]$)$，H の座標を H$(s,\ t)$ とおく．$\vec{n}\parallel\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ と表せる．よって $s=k+$[イ]，$t=2k+$[ウ] である．

点 H は l 上の点より，$k=-\dfrac{[エ]}{[オ]}$ である．したがって H$\left(\dfrac{[カキ]}{[ク]},\ \dfrac{[ケ]}{[ク]}\right)$ であり，AH の長さは $\dfrac{[コ]}{\sqrt{[サ]}}$ である．

< Note >

第44講　空間ベクトル(1)

【基礎確認事項】

［1］　空間座標

平面座標と同じように，空間内の点についても座標を考えることができる．

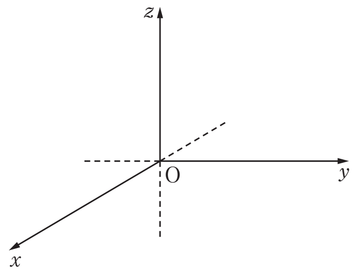
□原点Oを定め，Oを通り，互いに垂直な3本の数直線をひき，これを右の図のように **x 軸**，**y 軸**，**z 軸**と定める．これらをまとめて**座標軸**という．

x 軸と y 軸が定める平面を **xy 平面**

y 軸と z 軸が定める平面を **yz 平面**

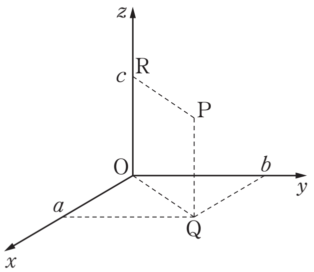
z 軸と x 軸が定める平面を **zx 平面**

といい，これらをまとめて**座標平面**という．



□この空間内の任意の点をPとし，Pから xy 平面に垂線PQをひき，点Qの xy 平面での座標を $(a,\ b)$ とする．さらに，点Pから z 軸に垂線PRをひき，Rの z 軸上での座標を c とすれば，点Pに対して3つの実数値の組 $(a,\ b,\ c)$ が定まる．この $(a,\ b,\ c)$ を点Pの**座標**といい，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ と表す．またこの $a,\ b,\ c$ を点Pの **x 座標**，**y 座標**，**z 座標**という．

　このように座標が $(a,\ b,\ c)$ で定められた空間を**座標空間**という．



⇒　C&U 1

［2］　空間ベクトル

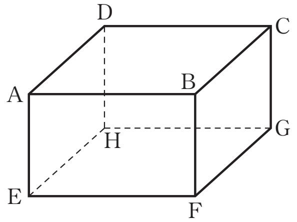
□平面ベクトルと同様に，空間において大きさと方向をもつ量を空間ベクトルという．平面ベクトルに関する定義は，空間ベクトルにおいてもそのまま適用される．

例　右図の直方体において

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DH}$



空間ベクトルの演算についても，平面ベクトルとまったく同様な演算法則が成立する．

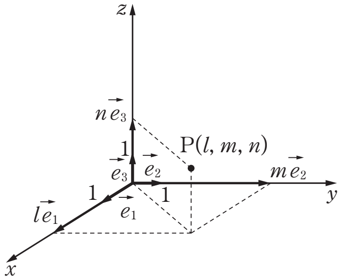
⇒　C&U 2

［3］ 空間ベクトルの分解と成分表示

□空間上の異なる4点O，A，B，Cについて，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)において，A，B，Cで定まる平面上に点Oがないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は**1次独立**であるという．

□空間上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が1次独立であるとき，この空間上の任意のベクトル$\vec{p}$は$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および実数s，t，uを用いて $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と，ただ1通りに表すことができる．$\vec{p}=\vec{0}$のときは　$s=t=u=0$である．このように，空間上の任意のベクトルは，互いに平行でない3つの方向に分解することができる．

□Oを原点とする座標空間上の任意のベクトル$\vec{p}$を，x軸方向，y軸方向，z軸方向の正の向きの単位ベクトル$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$を用いて表すことができる．



原点Oを始点とする$\vec{p}$に等しいベクトルの終点をPとする．このときの点Pの座標を(l，m，n)とすると，

$$\vec{p}=l\vec{e_1}+m\vec{e_2}+n\vec{e_3} \quad \cdots\cdots①$$

である．つまり，$\vec{p}$が与えられると，①を満たす実数の組(l，m，n)がただ1つ定まる．逆に，実数の組(l，m，n)が与えられると，①を満たす$\vec{p}$がただ1つ定まる．このとき，$\vec{p}$を

$$\vec{p}=(l,\ m,\ n) \quad \cdots\cdots②$$

と表す．②におけるlを$\vec{p}$の**x成分**，mを**y成分**，nを**z成分**といい，②を$\vec{p}$の**成分表示**という．

□x軸上，y軸上，z軸上の単位ベクトル$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$をとくに**基本ベクトル**という．基本ベクトルを成分で表すと　$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$である．
成分表示されたベクトルは，x軸方向，y軸方向，z軸方向の移動量を表す．

⇒ C&U ③

［4］ 空間ベクトルの大きさと内積

□成分表示されたベクトルの大きさについて次のことがわかる．

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

□内積の定義は，空間ベクトルでも平面ベクトルと同じである．空間における$\vec{0}$でないベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$について，そのなす角をθ($0°\leqq\theta\leqq180°$)とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

と定義する．とくに

$\vec{a}=0$　または　$\vec{b}=0$のときは　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

である.

□また，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

である.

内積についても，平面ベクトルと同様の演算法則が成り立つ.

⇒　C&U 4

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　A(3, −2, 1) に対して，次の点の座標を求めよ．

(1)　xy 平面に関して対称な点 P

(2)　z 軸に関して対称な点 Q

(3)　原点に対して対称な点 R

2　平行六面体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．また，線分 EG と線分 FH の交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

3　$\vec{a}=(-1,\ 5,\ 7)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ 3)$，$\vec{c}=(2,\ -2,\ 3)$，$\vec{d}=(-1,\ -9,\ 10)$ のとき，
$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$　が成り立つように定数 l，m，n の値を求めよ．

4　3 点 A(1, 3, 2)，B(2, 5, 3)，C(−1, 5, 6) を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさを求めよ．

< Note >

第44講　空間ベクトル(1)

1 [1]　定点 A(2, 0, 3), B(1, 2, 1) と，xy 平面上の点 P に対し，AP＋PB の最小値を求めよ．

[2]　直方体 ABCD-EFGH において　AB＝4, AD＝2, AE＝1 とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　内積 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}$ を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角は 120° より大きいか小さいかを調べよ．

＜ Note ＞

2　1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

(1)　辺OAの中点をMとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{MB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表し，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ を求めよ．

(2)　辺BC上に $\mathrm{BD}=\dfrac{1}{3}$ となるように点Dをとる．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を求めよ．

< Note >

3 [1]　A$(-2,\ 1,\ 3)$，B$(-3,\ 1,\ 4)$，C$(-3,\ 3,\ 5)$とするとき，2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$のなす角を求めよ．また，$\triangle$ABCの面積Sを求めよ．

[2]　2つのベクトル$\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

< Note >

第44講　空間ベクトル(1)

1辺の長さが4である正四面体OABCにおいて，辺OA，BCの中点をそれぞれM，N，線分MNの中点をGとする．$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$のなす角を$\theta$とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=-\dfrac{1}{\boxed{\text{イ}}}(\boxed{\text{ウ}}\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$　である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\boxed{\text{エオ}}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\boxed{\text{カ}}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=\boxed{\text{キ}}$　である．

(3) $\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$　である．

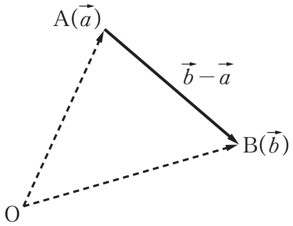
< Note >

第45講　空間ベクトル(2)

【基礎確認事項】

[1]　空間の位置ベクトル

空間のベクトルについても，平面のベクトルと同様に位置ベクトルを考えることができる．以下にその概略を挙げておく．

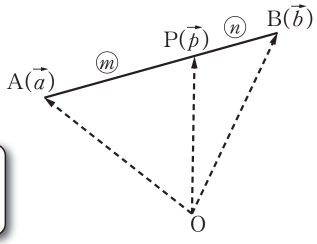


□位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を $\mathbf{P}(\vec{p})$ と表す．

空間において，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) とすると，

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

□線分 AB を $m:n$ に内分する点を P($\vec{p}$) とすると



$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

とくに，線分 AB の中点を M($\vec{m}$) とすると $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

□線分 AB を $m:n$ に外分する点を Q($\vec{q}$) とすると

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

□A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) とすると，△ABC の重心 G($\vec{g}$) は $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

⇒　C&U 1 2

[2]　共面条件

□一直線上にない 3 点は，ただ 1 つの平面上に存在する．

ところが空間においては，一直線上にない 4 点が同一平面上にあるとは限らない．

□一般に一直線上にない 3 点 A，B，C に対し，点 P が平面 ABC 上にある条件は以下である．

共面条件

4 点 A，B，C，P が同一平面上にある

$\iff$　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　となる実数 s，t が存在

⇒　C&U 3

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　平行六面体 ABCD-EFGH において，線分 CF を 2：1 に内分する点を P，線分 AP を 3：1 に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{CQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ で表せ．

2　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える．辺 OA，OB の中点をそれぞれ P，Q とし，辺 OC を 2：3 に内分する点を R とする．また，△PQR の重心を G とする．

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OG}$ の大きさ $|\overrightarrow{OG}|$ を求めよ．

3　A(3, 1, 2)，B(4, 2, 3)，C(5, 2, 5)，D(−2, −1, x) が同一平面上にあるとき x の値を求めよ．

＜ Note ＞

第 45 講　空間ベクトル(2)

1　1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 AB，CG，HE を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする．ただし，$0<t<1$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のなす角 θ を求めよ．

＜ Note ＞

2 ［1］ 3点 A$(-1,\ -1,\ -1)$，B$(1,\ 2,\ 3)$，C$(x,\ y,\ 1)$ が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ．

［2］ 正四面体 ABCD において，△BCD の重心を G とする．ある実数 k について，$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は，2点 A，G を通る直線上にあることを証明せよ．

< Note >

3　直方体ABCD-EFGHにおいて，辺BFを2：1に内分する点をP，辺FGを$t:(1-t)$に内分する点をQ，辺DHの中点をRとする．4点A，P，Q，Rが同一平面上にあるとき，実数tの値を求めよ．

＜ Note ＞

第 45 講　空間ベクトル(2)

四面体 ABCD の辺 BC の中点を P，線分 PD の中点を Q，線分 AQ の中点を R とする．また，直線 BR と平面 ACD の交点を S とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}(\vec{b}+\vec{c}+\boxed{イ}\vec{d})$　である．

(2)　点 S は直線 BR 上にあるので，$\overrightarrow{BS}=k\overrightarrow{BR}$（$k$ は実数）とおくと，

$$\overrightarrow{AS}=\left(1-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}k\right)\vec{b}+\frac{k}{\boxed{オ}}\vec{c}+\frac{k}{\boxed{カ}}\vec{d}\quad\cdots\cdots①$$ と表せる．

また，点 S は平面 ACD 上にあるので，$\overrightarrow{AS}=s\vec{c}+t\vec{d}$（$s$，$t$ は実数）　……②　とおける．

①，②より　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{d}$ である．

< Note >

第46講　空間ベクトル(3)

【基礎確認事項】

［1］　共面条件の応用

□平面 ABC 上にある点 P については，実数 t，u を用いて

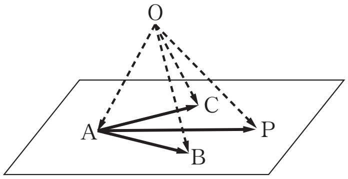
$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AC}$　と表せる．

これを変形すると

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+u(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP}=(1-t-u)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$

ここで，$1-t-u=s$　とおくと，次のことがいえる．



4点 A，B，C，P が同一平面上にある

$\iff$　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$　となる実数 s，t，u が存在

⇒ C&U 1

［2］　空間における直線のベクトル方程式

□空間における直線のベクトル方程式は，平面におけるものと同様に表せる．以下，s，t を実数とする．

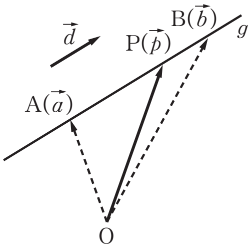
直線のベクトル方程式

点 $A(\vec{a})$ を通り，$\vec{d}$ を方向ベクトルとする直線上の点 $P(\vec{p})$ は

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を通る直線上の点 $P(\vec{p})$ は

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　$\iff$　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$



直線の媒介変数表示

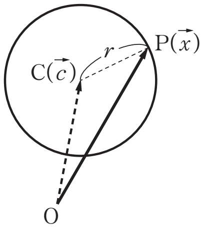
$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(l,\ m,\ n)$ である直線 g 上の

点 $P(x,\ y,\ z)$ は $\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \\ z=z_1+nt \end{cases}$　（t は実数）　と表せる．

⇒ C&U 2

［3］ 球面の方程式

□空間において，定点Cからの距離が一定値 r に等しいような点Pの軌跡を**球面**または**球**という．



点 C($\vec{c}$) を中心とし，半径を r とする球面の方程式は，球面上のどんな点 P($\vec{p}$) に対しても　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$ であることから

$|\vec{p}-\vec{c}|=r$　と表される．

これが球面のベクトル方程式である．

また，C(a, b, c) を中心とする半径 r の球面上に P(x, y, z) をとると，$\mathrm{CP}^2=r^2$ より

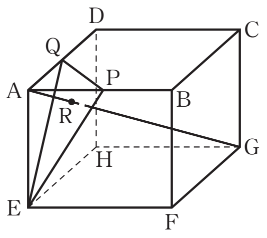
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$　と表せる．

これが球面の方程式である．

⇒ C&U 3

【CHECK & UP】

1　右図のような直方体 ABCD-EFGH において辺 AB の中点を P，辺 AD を 2：1 に内分する点を Q とし，対角線 AG と平面 EPQ の交点を R とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とおくとき，$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



2　2 点 A(1，3，−2)，B(1，−2，0) を通る直線 AB 上の点 P と原点 O について，OB⊥OP となるときの P の座標を求めよ．

3　2 点 A(−1，2，3)，B(3，4，−1) を直径の両端とする球面の方程式を求めよ．

< Note >

第46講　空間ベクトル(3)

1　四面体OABCを考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．また，線分OA，OB，OCを2：1に内分する点をそれぞれA′，B′，C′とし，直線BC′と直線B′Cとの交点をD，3点A′，B，Cを通る平面と直線ADとの交点をEとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

< Note >

2　原点Oおよび3点A(1, 0, 0), B(2, 1, 0), C(0, 0, 2)がある．点Oから3点ABCを通る平面に下ろした垂線の足をHとする．次の問いに答えよ．

(1)　Hの座標を求めよ．

(2)　四面体OABCの体積を求めよ．

＜ Note ＞

3　点 $(1,\ 2,\ 0)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を l，2 点 $(4,\ 2,\ 0)$，$(5,\ 3,\ 0)$ を通る直線を m とする．また，点 $(2,\ 2,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面をＳとする．

(1)　直線 l と yz 平面の交点の座標を求めよ．

(2)　直線 l 上の点Ｐと直線 m 上の点Ｑの最短距離を求めよ．

(3)　球面Ｓの方程式を求めよ．また，球面Ｓと直線 l が共有点をもつか調べよ．

< Note >

第46講　空間ベクトル(3)

原点をOとし，3点A(2, 0, 0)，B(0, 4, 0)，C(0, 0, 3)をとる．原点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線の足をHとする．このときHの座標は

$\left(\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}},\ \dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{ウエ}},\ \dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ウエ}}\right)$ であり，$|\overrightarrow{OH}| = \dfrac{\boxed{ケコ}}{\sqrt{\boxed{ウエ}}}$ である．

< Note >

第47講　整数の性質(1)

【基礎確認事項】

［1］　約数，倍数

□2つの整数 a，b について，整数 k を用いて　$b=ak$　と表されるとき，a は b の**約数**といい，b は a の**倍数**であるという．このとき，$\boldsymbol{a\,|\,b}$ と表す．倍数や約数には正の数のみならず負の数も含める．

例　-2 は6の約数であり，同時に6は -2 の倍数である．よって　　$-2\,|\,6$

また，$b=0$ のとき，$k=0$ とすれば a は任意の整数を取り得る．よって，すべての整数は0の約数であり，0はすべての整数の倍数である．

□2つ以上の整数に共通な約数を，それらの整数の**公約数**という．公約数のうち最大のものを**最大公約数**という．公約数は最大公約数の約数である．2つの整数 a，b の最大公約数が1であるとき，a と b は**互いに素**であるという．

□2つ以上の整数に共通な倍数を，それらの整数の**公倍数**という．公倍数のうち正で最小のものを**最小公倍数**という．公倍数は最小公倍数の倍数である．

□1と自分自身以外に約数をもたない正の整数を**素数**という．1は素数ではない．

□また，1より大きい整数で素数でないものを**合成数**という．合成数は，素数の積の形としてただ1通りに表せる（積の順序は無視する）．このように素数の積の形で表すことを**素因数分解**するという．

⇒　C&U 1

［2］　整数の割り算と商，余り

□整数 a を正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると

$$a=bq+r,\ 0\leqq r<b$$

を満たす整数 q，r がただ1通りに定まる．これを**除法の原理**という．

例　7を2で割ったときの商は3，余りは1であることより　$7=2\times3+1$　と表せる．また，$-25=3\cdot(-9)+2$　より，-25 を3で割ったときの商は -9，余りは2である．

⇒　C&U 2

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1 (1) $\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ．

(2) 108，360，900 の最大公約数と最小公倍数を求めよ．

2 a，b を整数とする．a を 7 で割った余りが 2，b を 7 で割った余りが 5 である．このとき，次の数を 7 で割ったときの余りを求めよ．

(1) $3a+b$　　(2) ab　　(3) a^2+b^2

＜ Note ＞

第47講　整数の性質(1)

1　次の(A)，(B)，(C)を満たす3つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．ただし，$a<b<c$ とする．

(A)　a，b，c の最大公約数は6

(B)　b と c の最大公約数は24，最小公倍数は144

(C)　a と b の最小公倍数は240

＜ Note ＞

2　n は整数とする．次のことを証明せよ．

(1)　n^2+7n+4 は偶数である．

(2)　n^2+1 は 3 の倍数でない．

(3)　n^2 を 6 で割ったときの余りは 2，5 にならない．

< Note >

3　a，b，c を整数とし，$a^2+b^2=c^2$　とする．次の問いに答えよ．

(1)　a，b のうち，少なくとも1つは3の倍数であることを示せ.

(2)　a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数であることを示せ.

＜ Note ＞

第 47 講　整数の性質(1)

(1)　最大公約数が 5，最小公倍数が 75 である 2 つの自然数 a，b $(a<b)$ は

$(a,\ b)=($ ア ， イウ $)$，$($ エオ ， カキ $)$　である．

(2)　a，b を整数とする．a を 5 で割ると 2 余り，b を 5 で割ると 3 余る．$a+b$，ab，a^2+b^2 を 5 で割った余りはそれぞれ　ク ， ケ ， コ である．

< Note >

第48講　整数の性質(2)

【基礎確認事項】

［1］ ユークリッドの互除法

□2つの自然数 a, b について，a を b で割ったときの商を q, 余りを r とすると，一般的に次のことが成り立つ．

> **互除法の原理**
> a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい

□この原理を利用し，2つの自然数 a, b の最大公約数を求める方法を**ユークリッドの互除法**という．最大公約数を求める方法として有効である．

例　408 と 119 の最大公約数を求める

408 を 119 で割ったときの商は 3　余りは 51

よって　408 と 119 の最大公約数は，119 と 51 の最大公約数に等しい

119 を 51 で割ったときの商は 2　余りは 17

よって　119 と 51 の最大公約数は，51 と 17 の最大公約数に等しい

51 を 17 で割ったときの商は 3　余りは 0．すなわち 51 は 17 で割り切れる．

よって　51 と 17 の最大公約数は, 17 と 0 の最大公約数, すなわち 17 に等しい．

したがって，408 と 119 の最大公約数は　17

⇒　C&U 1

［2］ n 進法

□整数の表現として，通常は 0 から 9 までの 10 種類の数字を並べることによって表現する．例えば「512」という数字は「100 の位」の数字が 5,「10 の位」の数字が 1,「1 の位」の数字が 2 であるが，隣り合う 2 つの位において高い位が低い位の 10 倍になっている．このように位取りの基礎（底）が 10 である数の表現方法を **10 進法**という．

□$n \geqq 2$ のとき，位取りの底が n である数の表現方法を **n 進法**といい，0 から $n-1$ までの数字を並べることで表現される．n 進法では，その数の右下に $_{(n)}$ と書く．10 進法では通常 $_{(10)}$ を省略する．n 進法で表された数を **n 進数**という．

例　2 進数 $1001_{(2)}$ について

位	2^3	2^2	2^1	$2^0(=1)$
数字	1	0	0	1

よって，$1001_{(2)}$ を 10 進法で表すと

$1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0=8+1=9$　である．

□ n 進法の小数については，小数第1位は $\frac{1}{n^1}$ の位，小数第2位は $\frac{1}{n^2}$ の位，となり，小数第 m 位の位は $\frac{1}{n^m}$ である．

⇒　C&U ２

［3］　分数と小数

□整数にならない分数 $\frac{m}{n}$ は，小数で表現すると有限小数（小数第何位かで終わる小数）または循環小数（同じ数字または同じ数字の列が繰り返される無限小数）となる．

有限小数となるものは分母 n の素因数が2または5であり，それ以外の素因数を含むものは循環小数となることが知られている．

□分数 $\frac{m}{n}$ は，位取りの基礎（底）によって，有限小数となったり循環小数となったりする．

例　$\frac{2}{3}$ は10進法においては　$0.666\cdots=0.\dot{6}$（循環小数）

3進法においては　$\frac{1}{3^1}$ の位（小数第1位）の数字が2より　$0.2_{(3)}$（有限小数）

【CHECK & UP】

1 次の2つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ．

(1)　72，15　　(2)　689，481

2 (1)　2進数　$101110_{(2)}$，5進数　$2403_{(5)}$ をそれぞれ10進法で表せ．

(2)　10進法73を3進法で表せ．

＜ Note ＞

第 48 講　整数の性質(2)

1　次の等式を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ.

(1)　$4x-7y=1$

(2)　$24x+19y=1$

< Note >

2 ［1］ $4x+2y+z=15$ を満たす自然数 x, y, z の組を求めよ．

［2］ (1) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ．

(2) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ．

＜ Note ＞

3 (1)　2 進法で表すと 10 桁になるような自然数Ｎは何個あるか求めよ.

(2)　自然数Ｎを 5 進法で表すと 3 桁の数 abc となり，7 進法で表すと 3 桁の数 cab となる．a，b，c を求めよ．また，Ｎを 10 進法で表せ.

< Note >

第48講　整数の性質(2)

$37x-90y=4$　……①　を満たす整数解を求めたい.

$90=37\times2+$ [アイ]　より　[アイ] $=90-37\times2$　……②

$37=$ [アイ] $\times2+$ [ウ]　より

[ウ] $=37-$ [アイ] $\times2=37-(90-37\times2)\times2=5\times37-2\times90$　……③

[アイ] $=$ [ウ] $\times3+1$　より　$1=$ [アイ] $-$ [ウ] $\times3$　これに②, ③の結果を反映させることにより

$37\times(-$ [エオ] $)-90\times(-$ [オ] $)=1$　　これを両辺4倍して①と差を取ることにより

①は　$37(x+$ [カキ] $)=90(y+$ [クケ] $)$　と変形できる.

37と90は互いに素であることより, 整数 k を用いて

　$x+$ [カキ] $=90k$　つまり　$x=-$ [カキ] $+90k$　と表せる.

したがって求める①の整数解は $x=-$ [カキ] $+90k$, $y=-$ [クケ] $+37k$（k；整数）と表せる.

< Note >

CHECK & UP 解答

第 25 講　指数関数・対数関数(1)

【CHECK & UP】

1

(1) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2\cdot 32}=\sqrt[3]{2^6}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2^3}=2\cdot 2=\mathbf{4}$

【別解】 $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{32}=2^{\frac{1}{3}}\cdot(2^5)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}=2^2=4$

(2) $(\sqrt[3]{2})^{12}=\sqrt[3]{2^{12}}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2^3\cdot 2^3\cdot 2^3}=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\mathbf{16}$

【別解】 $(\sqrt[3]{2})^{12}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{12}=2^{\frac{1}{3}\times 12}=2^4=16$

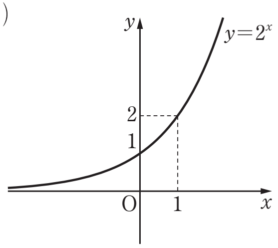
(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=\mathbf{2}$

【別解】 $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=(2^5)^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}=2^1=2$

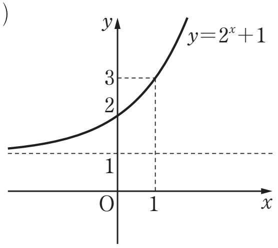
指数法則の確認.
このレベルの計算問題であれば，累乗根のままで計算することも可能．その上で，【別解】のように累乗根を指数で表現して計算を進める練習もしておきたい.

2

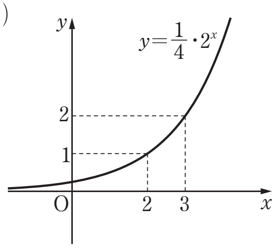
(1)



(2)



(3)



指数関数 $y=a^x$ のグラフは，$a>1$ のとき単調増加，$0<a<1$ のとき単調減少する．たとえば $a>1$ のときは累乗計算により関数の値は爆発的に大きくなっていく.
(2)は(1)のグラフを y 軸方向に 1 平行移動したもので，漸近線が $y=1$ となっている．(1)の漸近線は $y=0$ であるため x 軸と重なって見えない.
(3)は $y=\dfrac{1}{4}\cdot 2^x=2^{-2}\cdot 2^x=2^{x-2}$ より，(1)のグラフを x 軸方向に 2 平行移動したもの．グラフの形状は(1)とさほど変わりはない.

3

(1) $4^x=1024$　より　$(2^2)^x=2^{10}$　つまり　$2^{2x}=2^{10}$

よって　$2x=10$　より　$\boldsymbol{x=5}$

【別解】 $4^x=4^5$　より　$x=5$

(2) $8^x=\dfrac{1}{2}$　より　$2^{3x}=2^{-1}$

よって　$3x=-1$　より　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{3}}$

(3) $3^x>27$ より　$3^x>3^3$

(底 3 は 1 より大きい)　よって　$\boldsymbol{x>3}$

(4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}\leqq 81$　より　$3^{-(x+1)}\leqq 3^4$

(底 3 は 1 より大きい)　よって　$-(x+1)\leqq 4$　より　$\boldsymbol{x\geqq -5}$

【別解】 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}\leqq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$　(底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さい)

よって　$x+1\geqq -4$　より　$x\geqq -5$

指数方程式や不等式の基本は，底がそろった状態で両辺の指数を比較すること．左の 4 問はそれを確認する問題である．底はなるべく小さくするのが基本だが，(1)の【別解】でわかるように必ずしもその限りではない.
不等式の場合は，(底)>1 のときはもともと大小関係が変わらないが，$0<$(底)<1 のときは大小関係が逆転するので注意．ただし，そのことがしっかりと自覚できた後は，底の大きさが明らかな場合はそのことに言及する必要はない．(3)(4)で括弧書きしている部分がそれである.

第 26 講　指数関数・対数関数(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　$81=3^4$ より　$\log_3 81=\mathbf{4}$

(2)　$\sqrt{32}=2^{\frac{5}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{2}}$　より　$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}=\mathbf{-\frac{5}{2}}$

> $\log_a b$ は「底 a を何乗すると真数 b になるか」を表している．よって真数が底を何乗したものかがわかればすぐに log の値が出る．その時に指数の知識を活用する必要がある．

2 (1)　$\log_2 24-\log_2\frac{9}{4}+\log_2 6$

$=\log_2\left(24\div\frac{9}{4}\times 6\right)=\log_2 2^6=\mathbf{6}$

> 対数の法則を使うと，底を同じくする対数の和や差を 1 つの対数にまとめることができる．その際に真数部分は積や商の計算となる．逆に，真数部分を積や商で表し，これを複数の対数に分けていく方法も考えられる．問題によって使い分けが必要である．

(2)　$\log_4 3\cdot\log_9 25\cdot\log_5 8$

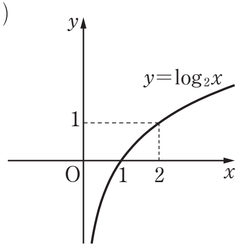
$=\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 25}{\log_2 9}\cdot\frac{\log_2 8}{\log_2 5}$

$=\frac{\log_2 3}{\log_2 2^2}\cdot\frac{\log_2 5^2}{\log_2 3^2}\cdot\frac{\log_2 2^3}{\log_2 5}$

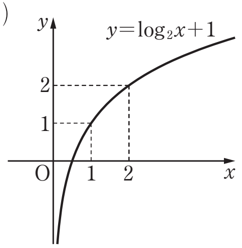
$=\frac{\log_2 3}{2}\cdot\frac{2\log_2 5}{2\log_2 3}\cdot\frac{3}{\log_2 5}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

> 底が異なる場合は，「底の変換公式」によって底を揃えるとよい．左は底を 2 に揃えた解法である．
> ただし，対数の和，差ではなく積，商である．よってこの形から 1 つの対数にまとめていくことはできない．したがって，それぞれの対数についてその真数を積・商で表して複数の対数に分けたり，$\log_a M^p=p\log_a M$ を利用して真数の指数部分の数字を前に出していく必要が出てくる．1 つにまとめていくこととは逆行するような感覚ではあるが，上記のように問題を通じて使い分けができるようにしていこう．

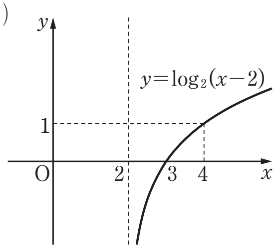
3 (1)



(2)



(3)



> 対数関数 $y=\log_a x$ は，指数関数同様，$a>1$ のとき単調増加，$0<a<1$ のとき単調減少する．しかしながら指数関数とは異なり，$a>1$ のときは累乗計算により関数の値の増加の幅はだんだん小さくなっていく．
> (2)は(1)のグラフを y 軸方向に 1 平行移動したもので，グラフの形状は(1)とさほど変わらない．
> (3)は(1)のグラフを x 軸方向に 2 平行移動したもので，漸近線が $x=2$ となっている．(1)の漸近線は $x=0$ であるため y 軸と重なって見えない．

4 (1)　$\log_3 x=2$　より　$\boldsymbol{x=3^2=9}$

【別解】　$\log_3 x=2$　より　$\log_3 x=\log_3 3^2$　　よって　$x=3^2=9$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$　より　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

つまり　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さく，(真数)>0

よって　$\boldsymbol{0<x\leqq\frac{1}{8}}$

> 対数方程式，不等式の基本．
> 底を同じくする対数における真数部分の比較となる．しかしこの問題のように左辺は対数，右辺は定数の形となることが非常に多い．
> (1)は対数の定義に従えばよいが，時に【別解】のように，$p=\log_a a^p$ として真数部分を比較することも必要である．
> (2)は不等式．指数不等式同様に底の大きさに注意．

第 27 講　指数関数・対数関数(3)

【CHECK & UP】

1 (1) $\log_{10}3^{30}=30\log_{10}3=30\times0.4771=14.313$

よって　$3^{30}=10^{14.313}$　より　$10^{14}<3^{30}<10^{15}$

したがって　3^{30} は **15 桁**の数である.

> 底を 10 とする常用対数のうち，$\log_{10}3=0.4771$ が与えられている．これにより，3 を底とする指数 3^{30} を，10 を底とする指数に変換することができる．10 を底とすることにより，その指数部から「けた」を知ることができる．10^1 で 2 桁になり，10^2 で 3 桁になる．同様にして，$10^{14.313}$ は 10^{14} で 15 桁になり，10^{15} には届いていないから 16 桁にはなっていないことがわかる.

(2) $\log_{10}0.2^{10}=\log_{10}\left(\dfrac{2}{10}\right)^{10}=10(\log_{10}2-\log_{10}10)$

$=10(0.3010-1)=-6.990$

よって　$0.2^{10}=10^{-6.990}$　より　$10^{-7}<10^{-6.990}<10^{-6}$

したがって　**小数第 7 位**に初めて 0 でない数字が現れる.

> 小数首位の問題．10^{-6} は小数第 6 位に初めて 0 でない数である「1」が現れる．$10^{-6.990}$ はそれより小さいため，小数第 6 位は「0」である．そして 10^{-7} よりは大きいので，小数第 7 位は 0 ではない．したがって小数第 7 位に初めて 0 でない数が現れるのである.

第 28 講　微分法・積分法(1)

【CHECK & UP】

1

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(-1+h)^2-2(-1+h)-1\}-\{3\cdot(-1)^2-2(-1)-1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3h^2-8h+4)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2-8h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h-8)}{h}=\lim_{h\to 0}(3h-8)=\mathbf{-8}$$

微分の「公式」を知っている人も，定義，すなわち「平均変化率」から極限の考え方を使って微分係数を求める流れを確認しておくこと．なぜこの微分係数が「接線の傾き」を表すのかを忘れないためでもある．
h を 0 に「限りなく近づけた」時の値が -8 に「限りなく近づく」．h に 0 を代入するので -8 に「なる」と錯覚しやすいので注意．

2 (1)　$y'=5(x^2)'-3(x)'+(7)'=5\cdot 2x-3\cdot 1+0$

$=\mathbf{10x-3}$

(2)　$y=8x^3-12x^2+10x-15$ より　$y'=\mathbf{24x^2-24x+10}$

【別解】　$y'=(4x^2+5)'(2x-3)+(4x^2+5)(2x-3)'$

$=8x(2x-3)+(4x^2+5)\cdot 2$

$=24x^2-24x+10$

導関数，いわゆる微分の公式を利用して微分する．
(1)は基本問題．1 行目は考え方であり，実際には 2 行目の答えにダイレクトでたどり着く必要がある．
(2)は展開してから微分する問題であるが，【別解】のように「積の微分の公式」(数Ⅲ) を利用して解くこともできる．

3　$y=x^3-3x^2+5$ より　$y'=3x^2-6x$

$x=1$ のとき　$y'=-3$

よって点 A(1, 3) における

接線の方程式は　$y=-3(x-1)+3$　よって　$\mathbf{y=-3x+6}$

法線の方程式は　$y=\frac{1}{3}(x-1)+3$　よって　$\mathbf{y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}}$

微分の公式を利用すれば，微分係数が簡単に求められる．この微分係数が接線の傾きとなる．傾きと通る 1 点で直線の方程式が定まるが，この通る点は，接線や法線にとっては微分係数を出す時に使った点，すなわち「接点」である．他に通る点が与えられたとしても，接線や法線を作る際に用いるべきはこの接点の座標である．

第 29 講　微分法・積分法(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

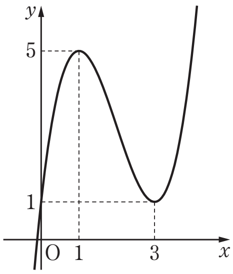
$f'(x)>0$　となるのは　$x<1,\ 3<x$

$f'(x)<0$　となるのは　$1<x<3$

よって　$f(x)$ の増減は下表.

グラフは右図.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	0	↗



したがって

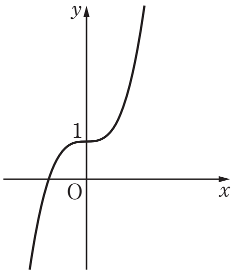
$x\leqq 1,\ 3\leqq x$ で増加　$1\leqq x\leqq 3$　で減少

極大値　5　　極小値　1

(2)　$f'(x)=3x^2$

よって増減は下表．グラフは右図.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗



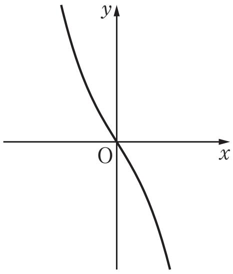
したがって，つねに増加

極値はない

(3)　$f'(x)=-3x^2-4$

よって増減は下表．グラフは右図.

x	$\cdots$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	↘



したがって，つねに減少

極値はない

グラフの増減を表した表，すなわち「増減表」と，それを元にしてグラフを描く練習である．
　$f'(x)$ の符号によりグラフの増減が決定するが，それは不等式を解くことによって得られる．その不等式が 2 次（以上）になると，「グラフ」による解法となるであろう．その際，$f'(x)=0$ となる x が $f'(x)$ の正負の分かれ目となる．
　しかしながら，すぐに $f'(x)=0$ とすぐに置く必要は全くないことは，2 次不等式の解法を通じて既習である．特に $f'(x)$ が簡単に因数分解できる場合はまさにその例である．
　「増減を調べよ」となっているので，増減を文で表し直している．その際，増加（減少）する範囲には，$f'(x)=0$ となる x の値も含まれる．
　また，増加から減少，減少から増加に転じたときの関数の値が「極値」である．したがって(2)でわかるように，$f'(x)=0$ が極値をとる x 座標になるとは限らない．(3)では増減表が味気ないものとなっている．文章だけでもよいだろう．

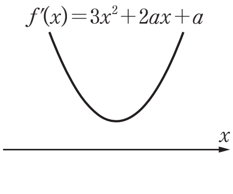
2 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

よって　$f'(x)=0$ における判別式を D とすると，$D\leqq 0$ であればよい.

したがって

$\dfrac{D}{4}=a^2-3a\leqq 0$　　$a(a-3)\leqq 0$

ゆえに　$\boldsymbol{0\leqq a\leqq 3}$



$f(x)$ の増減を決めるのは $f'(x)$ の符号．この $f'(x)$ の正負は，$y=f'(x)$ のグラフが x 軸より上に存在するか，下に存在するか，である．$f(x)$ が 3 次関数であれば，$f'(x)$ は 2 次関数になる．これが常に「0 以上」（0 になってもよい）であれば，$f(x)$ はつねに増加する．
　特に x の変域に指定がない（すべての実数を取り得る）場合は，2 次関数のグラフと x 軸の関わり合いは「2 乗の係数の正負」と「判別式」で扱うことができる．

3　$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	8	↘	-19	↗	33

よって　**最大値 33**（$x=4$）　　**最小値 −19**（$x=2$）

最大値および最小値については，変域の中に極値をとる x 座標が入っていれば極値が候補となる．この候補と，変域の端における値を比較して最大値，最小値を導く．もちろん極値をとる x 座標が含まれていないときは，最大値，最小値は変域の端でのみとることができる．.

第 30 講　微分法・積分法(3)

【CHECK & UP】

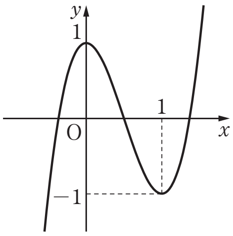
1　$f(x)=4x^3-6x^2+1$ とおくと

$$f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$$

よって $f(x)$ の増減は下表.

グラフは右下図.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-1	↗



よって

実数解は 3 個　　2 個は正，1 個は負

3 次方程式において因数分解が困難な場合でも，その解の存在する範囲を絞り込むことができる．そのために必要なのが 3 次関数のグラフである．

この問題では，極大値が正，極小値が負であるため，グラフの形状から x 軸と 3 回交わることがわかる．すなわち 3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもつ，ということである．

また，その 3 解は，$x<0$，$0<x<1$，$1<x$ に 1 つずつ存在することがわかる．今回は正負のみを答える問題であるが，グラフを用いた解の存在範囲の重要性を認識しておきたい．

2　(1)　$f(x)=(x+1)^3-(6x^2+1)=x^3-3x^2+3x$　とおくと

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqq 0$$

よって，$f(x)$ はつねに増加する関数である．

また，$f(0)=0$

したがって，$x>0$ においてつねに $f(x)>0$

つまり　$x>0$ のとき　$(x+1)^3>6x^2+1$　が成り立つ.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	↗		↗

(2)　$f(x)=x^4-4x+3$　とおくと

$$f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=4(x-1)(x^2+x+1)$$

$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$　より　$f(x)$ の増減は右表.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

よって $f(x)$ の最小値は 0 より　$f(x)\geqq 0$　つまり　$x^4-4x+3\geqq 0$

したがって　$x^4+3\geqq 4x$

第 31 講　微分法・積分法(4)

【CHECK & UP】

1　以下，C を積分定数とする．

(1)　$\int(3x^2-4x+1)dx$

$=3\int x^2dx-4\int xdx+\int 1\,dx$

$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+1\cdot x+C=\boldsymbol{x^3-2x^2+x+C}$

(2)　$\int t(t+1)dt=\int(t^2+t)dt=\int t^2dt+\int tdt$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+C}$

> 不定積分の計算である．積分計算後は積分定数 C がつく．答えを微分すると C が消えるため，C に関わらず積分前の式に戻る．
> 微分と同様，積分についても(1)の 2 行目のような計算は計算に慣れた時点で不要となる．
> (2)は積分変数が t である．積分変数はいつでも x とは限らない．変数の文字にかかわらず x と同じ感覚でできるようにしておこう．

2　(1)　$\int_{-1}^{3}(x^2+2x+4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{3}=(9+9+12)-\left(-\frac{1}{3}+1-4\right)=\boldsymbol{\frac{100}{3}}$

(2)　$\int_{1}^{3}(2x^3+3x^2-5x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4+x^3-\frac{5}{2}x^2+x\right]_{1}^{3}=\left(\frac{81}{2}+27-\frac{45}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{2}+1-\frac{5}{2}+1\right)=\boldsymbol{48}$

> 定積分の計算は，不定積分の計算後に代入作業が入る分，計算間違いのリスクがある．特に－の値を入れる時，そして下端を入れて「引き算」を行う時に注意したい．

3　$\int_a^x f(t)dt=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{2}{3}$　……①

①の左辺を x で微分すると　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

よって①の両辺を x で微分することにより　$\boldsymbol{f(x)=3x-2}$

①で $x=a$ のとき　$0=\frac{3}{2}a^2-2a+\frac{2}{3}$　　$9a^2-12a+4=0$　　$\boldsymbol{a=\frac{2}{3}}$

> 定積分と導関数の関係は，「微分をすれば被積分関数が出てくる」という結果だけを暗記すべきではない．【基礎確認事項】を参照し，その原理を理解した上でその知識を利用していくこと．

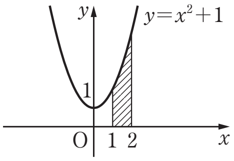
第 32 講　微分法・積分法(5)

【CHECK & UP】

1 (1)　求める面積は

$$\int_{1}^{2}(x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\mathbf{\frac{10}{3}}$$



面積を積分を使って求める練習．積分を求める範囲においてグラフが x よりすべて上かどうかを判断してからインテグラルの計算に入ろう．x 軸より下の場合は，関数全体に－をつけることにより x 軸より上に折り返した x 軸対称のグラフを用いて面積を求めていく．

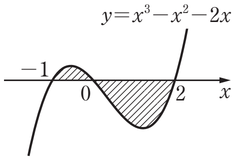
(2)　$y=x(x+1)(x-2)=x^3-x^2-2x$　より，

求める面積は

$$\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\mathbf{\frac{37}{12}}$$



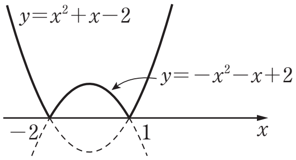
2 $y=|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|$ のグラフより

$$\int_{0}^{2}|x^2+x-2|dx$$

$$=\int_{0}^{1}(-x^2-x+2)dx+\int_{1}^{2}(x^2+x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-0+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\mathbf{3}$$



インテグラルすなわち面積と判断するるのは早合点であるが，被積分関数の全体に絶対値がついている場合は，そのグラフがすべて x 軸より上に存在するため，インテグラルは面積と同義となる．

第 33 講　微分法・積分法(6)

【CHECK & UP】

1　2 曲線の交点の x 座標は

$-x^2+2x+1=x^2+4x-3$　より　$x^2+x-2=0$　　$x=-2,\ 1$

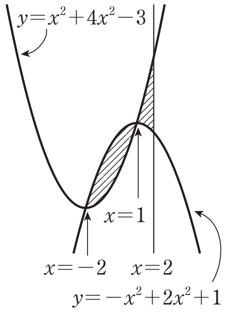
よってグラフより求める面積は

$$\int_{-2}^{1}\{(-x^2+2x+1)-(x^2+4x-3)\}dx+\int_{1}^{2}\{(x^2+4x-3)-(-x^2+2x+1)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)dx+\int_{1}^{2}(2x^2+2x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{2}{3}x^3+x^2-4x\right]_{1}^{2}=9+\frac{11}{3}=\mathbf{\frac{38}{3}}$$

複数のグラフが絡む面積においては，その上限関係と積分する範囲に注意すること.



第 34 講　数列(1)

【CHECK & UP】

1 (1)　初項を a，公差を d とすると，この等差数列 a_n の一般項は

$a_n=a+(n-1)d$　と表される．

条件より　$a+9d=28$，$a+39d=148$

よって　$a=-8$，$d=4$　　よって　**初項 −8　公差 4**

一般項は $a_n=-8+(n-1)\cdot4=4n-12$

これが 192 になるのは　$4n-12=192$ より　$n=51$

したがって 192 はこの数列の**第 51 項**である．

> 等差数列の一般項に関する問題．一般項は，公式というにはあまりに当たり前の形．初項から始まり，一定数ずつ増加し続ける，または減少し続ける感覚を身につけよう．

(2)　この等差数列の一般項の初項を a とすると，第 20 項が 43 より

$a+19\cdot3=43$　よって　$a=-14$

よって求める和は　$\dfrac{20}{2}(-14+43)=\mathbf{290}$

> 末項が第 20 項であることは問題文には記載されていないので，問題文から判断する必要がある．等差数列の和は「初項」「末項」「項数」により決まる．

2 (1)　初項を a，公比を r とすると，この等比数列 a_n の一般項は

$a_n=a\cdot r^{n-1}$　と表される．

条件より　$ar^3=-54$　……①　　$ar^6=1458$　……②

①を②に代入して　$-54r^3=1458$　　$r^3=-27$

よって　$\boldsymbol{r=-3}$

このとき①より　$-27a=-54$　　$\boldsymbol{a=2}$

一般項は　$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

これが −486 となるのは　$2\cdot(-3)^{n-1}=-486$　　$(-3)^{n-1}=-243=(-3)^5$

$n-1=5$　　よって　$n=6$

したがって −486 はこの数列の**第 6 項**である．

> 等比数列の一般項に関する問題．等差数列同様，一般項を当たり前のように扱えるようにしたい．
> 等比数列は，公比が正の場合は単調増加，または減少する．そして公比が負の場合は正の数と負の数を交互に繰り返す．

(2)　$\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=93$　より　$2^n=32$　　よって　$\boldsymbol{n=5}$

> 等比数列の和は「初項」「公比」「項数」により決まる．

第 35 講　数列(2)

【CHECK & UP】

1 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3$

$\displaystyle=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n=2n^2-n=\boldsymbol{n(2n-1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{3}{6}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^{n+1}-2}$

> 公式を使ったシグマによる和の計算である．
> (1)においては，慣れたら１行のような「複数のシグマに分ける」必要はない．また，最後の答えを必ずしも因数分解する必要はないが，この先にさらに問題が続く場合には必要となることもあるので選択肢には入れておきたい．また，１次式の数列，すなわち「等差数列」の和より，等差数列の和の公式を使っても和を求めることができる．
> (2)は平方数のシグマの公式を利用している．共通因数でくくりながら最後の答えを導いた．その際，さらに６で「通分」していることにも注目しておこう．
> (3)は「等比数列」の初項から第 n 項までの和である．よって等比数列の公式に入れることができる．a^n の形をしている数列の和はこのように等比数列の和の公式を用いるとよい．初項は $k=1$ のときの項であることは言うまでもない．

2 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$\{b_n\}$ は 2，3，4，5，6，……　であり，その一般項は

$b_n=2+(n-1)\cdot 1=n+1$ と考えられる．

よって $n\geqq 2$ のとき

$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n+1)$

これは $n=1$ のときも成り立つ．したがって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}n(n+1)}$

> 与えられた数列の規則がすぐにわからないときは，このように階差数列を考えることは１つの方法である．
> 実際にはこのように数列の項が羅列して与えられることは少ない．今回は階差数列を通じて数列の一般項を作ること，そしてその和をもとの数列の初項に加えていくことでもとの数列の一般項にたどり着くこと，などを理解してほしい．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$\{b_n\}$ は 1，2，4，8，16，32，…… であり，その一般項は

$b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ と考えられる．

よって $n\geqq 2$ のとき

$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=2+\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=2^{n-1}+1$

これは $n=1$ のときも成り立つ．したがって　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}+1}$

> (1)は階差数列が「等差数列」であり，(2)は階差数列が「等比数列」である．
> 1でも触れたが，等差数列には和の公式があるが，使わなくともシグマの公式で計算できる（使う公式はもともと等差数列の和の公式から導くことができるから当然であるが）．等比数列においては，等比数列の和の公式を使う必要がある．したがって，「初項」「公比」「項数」を見誤らないようにしたい．

第 36 講　数列(3)

【CHECK & UP】

1 $S_n=-3n^2+6n$ より $S_1=-3+6=3$　よって　$a_1=S_1=3$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(-3n^2+6n)-\{-3(n-1)^2+6(n-1)\}=-6n+9 \quad \cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$a_1=3$

よって $n=1$ のときも①は成り立つ.

したがって　$\boldsymbol{a_n=-6n+9}$

2 $n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $n-1$ 群までに入る項の項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1) \quad \text{である.}$$

よって，第 n 群の最初の項は，もとの数列の $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 番目の項である.

もとの数列の一般項は $a_n=2n-1$ より，第 n 群の最初の項は

$$2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=\boldsymbol{n^2-n+1}$$

また，第 n 群の最後の項は，もとの数列の $\frac{1}{2}n(n+1)$ 番目より

その項は　$2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}-1=\boldsymbol{n^2+n-1}$

> 群数列は，群をはずすと明確な規則性がわかるものと，はずすとわかりにくくなるものに分かれる．今回は元の数列が奇数の数列であるから前者である．
> 　特にもとの数列の一般項がわかる場合，問題となっている項がもとの数列の何番目かがわかれば，その一般項から具体的に求めることができる．そのカギを握るのが,「各群の項数」と「その和」である．その和が，群の末項までの項数，すなわちもとの数列の何番目かを表している．

第 37 講　数列(4)

【CHECK & UP】

1　$a_2=2a_1+3=2\cdot1+3=\mathbf{5}$　　$a_3=2a_2+3=2\cdot5+3=\mathbf{13}$

$a_4=2a_3+3=2\cdot13+3=\mathbf{29}$　　$a_5=2a_4+3=2\cdot29+3=\mathbf{61}$

> 漸化式により，前までの項を利用して「帰納的に」各項が順次求まっていくことがわかるであろう．

2　(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 2 の等差数列

よって　$a_n=1+(n-1)\cdot2=\mathbf{2n-1}$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列

よって　$a_n=4\cdot2^{n-1}=\mathbf{2^{n+1}}$

> (1)(2)ともに a_{n+1} と a_n，つまり「隣接 2 項」に関する漸化式．(1)は a_n に 2 を加えると a_{n+1} になる．どの隣接 2 項でもその関係は変わらず継続される．よって(1)は「等差数列」を表す．(2)も同様に a_n に 2 を掛けると a_{n+1}，すなわち「等比数列」を表す．

3　$a_{n+1}=3a_n+1$　……①

$\alpha=3\alpha+1$　……②

②より　$\alpha=-\dfrac{1}{2}$

①－②より　$a_{n+1}-\alpha=3(a_n-\alpha)$　つまり

①は　$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$と変形できる．

> 「特性方程式」を用いた漸化式の解法．漸化式が $a_{n+1}=pa_n+q$ の形をしている時に効果的である．
> ちなみに答案における 2 行目から 4 行目は不要である．①が 5 行目のように変形できることは「事実」であり，それ以上でもそれ以下でもない．この変形により，α だけ「ずれた」数列 $\{a_n-\alpha\}$ が「等比数列」を表していることがわかる．
> 　また，この形の漸化式は他にも「ずらして引く」「予想して数学的帰納法（後述）で示す」などの解法がある．誘導がついていたら乗れるようにしておくとよい．

よって　数列 $\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $a_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$，公比 3 の等比数列である．

したがって　$a_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}\cdot3^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=\mathbf{\dfrac{11}{2}\cdot3^{n-1}-\dfrac{1}{2}}$

第38講　数列(5)

【CHECK & UP】

1 [1]　$n=1$ のとき

(左辺)$=1$，(右辺)$=1$　より①は成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき　①が成り立つ，すなわち

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

より，$n=k+1$ のときも①が成り立つ．

[1][2]よりすべての自然数 n について①が成り立つ．

帰納法の基本問題，つまり k 番目の成立を仮定し，その次の $k+1$ 番目の成立が言えれば，1番目が成り立つことにより2番目，2番目が成り立つことにより3番目，と帰納的に永遠に成り立つ，つまりすべての自然数で成り立つことがわかる．
今回証明したい式は「等式」．$n=k+1$ のときの左辺を作り，そこに $n=k$ で成り立つ式を代入し計算することで $n=k+1$ のときの右辺となる．

第 39 講　平面ベクトル(1)

【CHECK & UP】

1

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と等しいベクトルは　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{FE}}}$

$\overrightarrow{\mathrm{FO}}$ と等しいベクトルは　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ED}}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$

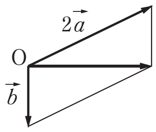
$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ と等しいベクトルは　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{BO}}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OE}}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=\mathbf{1}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\mathbf{2}$

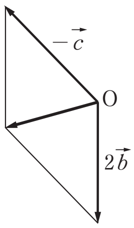
> ベクトルは「大きさ」と「向き」で表される量であることと同時に，ベクトルには「位置の概念がない」ということをまずは把握する必要がある．つまり同じ平面上に，あるベクトルと同じベクトルが無数にあり，また必要に応じて平行移動して無数に作ることができる．
> ベクトルの「大きさ」は，有向線分の長さであるが，ベクトルの長さ，と言わないようにしたい．

2

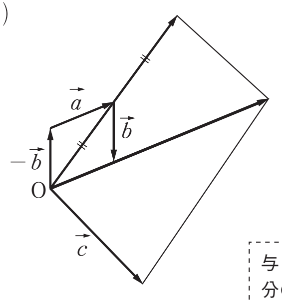
(1)



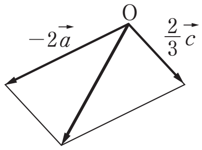
(2)



(3)



(4)



> 与えられたベクトルを図示し，その表す有向線分の大きさと向きを把握する練習である．とくに問題から点や図形が与えられているときは，新たに作ったベクトルがその図形においてどういう意味をもつのかを把握するのに役立つ．

3　$\vec{p}=-5\vec{a}+2\vec{b}$　……①　　　$\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$　……②

(1)　①＋②×2 より　$\vec{a}=\boldsymbol{\vec{p}+2\vec{q}}$

(2)　①×3＋②×5 より　$\vec{b}=\boldsymbol{3\vec{p}+5\vec{q}}$

(3)　$-3\vec{a}+4\vec{b}=-3(\vec{p}+2\vec{q})+4(3\vec{p}+5\vec{q})=\boldsymbol{9\vec{p}+14\vec{q}}$

> ベクトルが加法について閉じていることから，ベクトルの和・差・実数倍は，整式の計算と同じように行うことができる．

4

(1)　$\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ -3)+2(-1,\ 2)=(2,\ -3)+(-2,\ 4)$
$=(2-2,\ -3+4)=\mathbf{(0,\ 1)}$

(2)　$2\vec{a}-3\vec{b}=2(2,\ -3)-3(-1,\ 2)$
$=(4,\ -6)-(-3,\ 6)=\mathbf{(7,\ -12)}$

> ベクトルの成分表示は x 軸方向，y 軸方向の「移動量」を表す．和，差，実数倍についても，x 軸方向，y 軸方向それぞれの移動量の和，差，実数倍である．

第 40 講　平面ベクトル(2)

【CHECK & UP】

1

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=5\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{15}{2}}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=5\cdot 3\cdot 0=\mathbf{0}$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 135^\circ=5\cdot 3\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-\dfrac{15}{\sqrt{2}}}$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ=5\cdot 3\cdot(-1)=\mathbf{-15}$

> 内積は計算による定義が先行する概念である．まずはこの練習により定義を頭にたたき込もう．ちなみにベクトルの内積は「ベクトル」ではなく「スカラー」である．つまり内積は実数である．これによりベクトルの世界を他の分野の世界と結びつけることが可能となる．

2

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times 9+10\times 6=\mathbf{78}$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$|\vec{a}|=\sqrt{4+100}=2\sqrt{26}$　$|\vec{b}|=\sqrt{81+36}=3\sqrt{13}$　より

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{78}{2\sqrt{26}\cdot 3\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より　$\theta=\mathbf{45^\circ}$

> 内積は定義による計算に加え，成分表示されている場合には「公式」からも求められる．
> この定義と公式を利用することにより，2 つのベクトルのなす角に関する問題を解くことができる．

3

(1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(2) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

> 内積の演算法則により，文字式における分配法則や展開をするのと同じような感覚で内積を計算することができる．その感覚を用いる上での主な注意点は，内積を表す「・」は省略できないこと，また $(\vec{a})^2$ といった誤記も避けること，である．

第 41 講　平面ベクトル(3)

【CHECK & UP】

1

(1)　$P(\vec{p})$ とすると

$$\vec{p}=\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{2+5}=\frac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}=\frac{5}{7}\boldsymbol{\vec{a}}+\frac{2}{7}\boldsymbol{\vec{b}}$$

(2)　$Q(\vec{q})$ とすると

$$\vec{q}=\frac{3\vec{a}+(-1)\vec{b}}{-1+3}=\frac{3\vec{a}-\vec{b}}{2}=\frac{3}{2}\boldsymbol{\vec{a}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\vec{b}}$$

位置ベクトルによる内分点, 外分点の表現である. 位置ベクトルは「始点の固定化」である. よって点 O を始点とするのみならず, 問題によって与えられた 2 つのベクトルの始点が同じ場合には, 分点の扱いに関してこの位置ベクトルの考え方を使うことが非常に多いであろう.

2

(1)　$\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OA}$　より　3 点 O, A, B は一直線上にある.

(2)　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}+4\vec{b})-(-2\vec{a})$

$=4\vec{a}+4\vec{b}=4(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(6\vec{a}+2\vec{b})-4\vec{a}$

$=2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$

よって　$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BD}$　より　$AC \parallel BD$

(3)　$\overrightarrow{BD}=2(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=(-2\vec{a}-6\vec{b})-4\vec{a}=-6\vec{a}-6\vec{b}=-6(\vec{a}+\vec{b})$

よって　$\overrightarrow{BE}=-3\overrightarrow{BD}$　より　3 点 B, D, E は一直線上にある.

共線条件の基本問題である.
　2 つのベクトルのうち, 片方を実数倍したものがもう片方になっていれば, 2 つのベクトルは「平行」である.
　さらに, 2 つのベクトルの「始点が同じ」場合は 2 つのベクトルは「同一直線上」にあり, その始点とそれぞれのベクトルの終点の 3 点が同一直線上にある, すなわち 3 点が「共線」である.

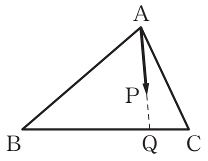
第 42 講　平面ベクトル(4)

【CHECK & UP】

1 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$ より

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=k\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{k}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4k}{7}\overrightarrow{AC}$



共線条件の応用である．
与えられた $\overrightarrow{AP}$ に関する式を変形するだけでも出るが，ここでは「1 次独立である 2 つのベクトルの終点を結ぶ直線上にある」条件として，2 つのベクトルの「係数の和が 1」であることを認識したい．

点 Q が直線 BC 上にあるとき

$\frac{k}{7}+\frac{4k}{7}=1$　　$\frac{5}{7}k=1$　　よって　$k=\mathbf{\frac{7}{5}}$

このとき　$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$　より　点 Q は**線分 BC を 4：1 に内分する点**.

第 43 講　平面ベクトル(5)

【CHECK & UP】

1　求める直線上の点の座標を P$(x,\ y)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$　より　$(x,\ y)=(3,\ 4)+t(3,\ -1)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=3+3t} \\ \boldsymbol{y=4-t} \end{cases}$　（t は媒介変数）

媒介変数表示に変形し，さらに媒介変数を消去してしまう方法は，ダイレクトに直線の方程式を作るより遠回りになりあまり意味がないように思えるかもしれない．直線のベクトル方程式の概念，および媒介変数表示は，空間ベクトルになったときに真価を発揮するため，それまでに練習を積んでおくこと．

2　求める直線上の点の座標を P$(x,\ y)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より　$(x,\ y)=(1,\ 2)+t(-2,\ 1)$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{x=1-2t} \\ \boldsymbol{y=2+t} \end{cases}$　（t は媒介変数）

【別解】

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　より

$(x,\ y)=(1-t)(1,\ 2)+t(-1,\ 3)=(1-t,\ 2-2t)+(-t,\ 3t)=(1-2t,\ 2+t)$

よって　$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \end{cases}$　（t は媒介変数）

3　求める直線上の点を P$(x,\ y)$ とおくと，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-6,\ y+3)$　より　$-1(x-6)+2(y+3)=0$

よって求める方程式は　$\boldsymbol{x-2y-12=0}$

【別解】

$\vec{n}=(-1,\ 2)$ に垂直な直線の方程式は

$-x+2y+c=0$　とおける．

これが $(6,\ -3)$ を通るので，

$-(x-6)+2(y+3)=0$　である．

したがって求める方程式は　$x-2y-12=0$

垂直というキーワードから思い浮かべるのは，図形と方程式の分野においては「2 直線の傾きの積が -1」であり，ベクトル分野においては「内積が 0」である．ベクトル方程式はある条件を満たす点 $(x,\ y)$ の集合，すなわち「軌跡」の考えに基づいている．
別解は，内積 $=0$ の考え方から発展し，直線の式における x および y の係数が決定することと，通る点を代入すると式が成立するような変形を施したものである．

4　$|5\overrightarrow{\mathrm{OP}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$　より

$\left|5\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}\right)\right|=5$

$5\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}\right|=5$

よって　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}\right|=1$

よって，**辺 AB を 2：3 に内分する点を中心とする半径 1 の円**を表す．

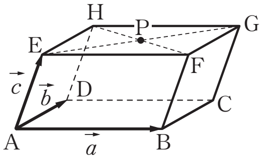
ここでは円のベクトル方程式から中心と半径を導く練習を行ってもらった．
円を表すベクトル方程式は，円の性質を使うことで他にも導く方法がある．とくに「半円の弧に対する円周角は 90°」であることは注目しておきたい．

第 44 講　空間ベクトル(1)

【CHECK & UP】

1　(1)　**P(3, −2, −1)**　　(2)　**Q(−3, 2, 1)**　　(2)　**R(−3, 2, −1)**

2　$\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$　　$\overrightarrow{BH}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$



$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}=\vec{c}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=(\vec{a}+\vec{b})-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}}$

平行六面体とは，2 つずつ平行な 3 組の平面で囲まれる六面体．直方体や立方体もこの平行六面体に含まれる．また，各面は平行四辺形である．

3　$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$　より

$(-1,\ -9,\ 10)=l(-1,\ 5,\ 7)+m(3,\ 4,\ 3)+n(2,\ -2,\ 3)$

$=(-l+3m+2n,\ 5l+4m-2n,\ 7l+3m+3n)$

空間上の任意のベクトルは，1 次独立の 3 つのベクトルでただ 1 通りに表せる．

よって　$-l+3m+2n=-1$，$5l+4m-2n=-9$，$7l+3m+3n=10$　より

$\boldsymbol{l=1,\ m=-2,\ n=3}$

4　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 1)$　より　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 2,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+2\times2+1\times4=6$

空間においても，平面におけるベクトルの大きさ，内積の計算と同様に行うことができる．z 成分に関する計算が加わることに注意．

よって　$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$　より　$\angle BAC=\mathbf{60°}$

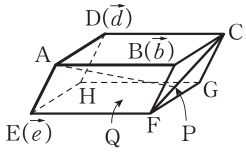
第 45 講　空間ベクトル(2)

【CHECK & UP】

1 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AF}}{3}$

$=\dfrac{(\vec{b}+\vec{d})+2(\vec{b}+\vec{e})}{3}$

$=\dfrac{\boldsymbol{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}}{\boldsymbol{3}}$



ここでは空間における位置ベクトルの概念を利用し,「分点」の表現が中心となる．3 つの 1 次独立なベクトルのうち，2 つを利用することでその「2 つのベクトルが含まれる平面上のベクトル」を表すことができる．空間ベクトルの問題であっても局所的には平面上で考えることが多い．

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{3}=\dfrac{\boldsymbol{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}}{\boldsymbol{4}}$

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{4}-(\vec{b}+\vec{d})=\dfrac{\boldsymbol{-\vec{b}-3\vec{d}+2\vec{e}}}{\boldsymbol{4}}$

2 (1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{2}+\dfrac{2}{5}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{2}{15}\vec{c}}$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times1\times\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって　$|\overrightarrow{OG}|^2=\left|\dfrac{1}{30}(5\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c})\right|^2$

$=\dfrac{1}{30^2}(25|\vec{a}|^2+25|\vec{b}|^2+16|\vec{c}|^2+50\vec{a}\cdot\vec{b}+40\vec{b}\cdot\vec{c}+40\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\dfrac{1}{30^2}\left(25+25+16+50\cdot\dfrac{1}{2}+40\cdot\dfrac{1}{2}+40\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{131}{30^2}$

したがって　$|\overrightarrow{OG}|=\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{131}}}{\boldsymbol{30}}$

3 $\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 3)$，$\overrightarrow{AD}=(-5,\ -2,\ x-2)$ に対し

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　となる実数 s，t が存在する．

よって　$(-5,\ -2,\ x-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$

$-5=s+2t$　……①　　$-2=s+t$　……②

$x-2=s+3t$　……③

①，②より　$s=1$，$t=-3$

このとき③より　$x=\boldsymbol{-6}$

「共面条件」の基本である．
平面，空間ベクトル問わず，同一直線上にない 3 点 A，B，C は 1 つの平面上にある（これを平面 ABC という）．
さらにもう 1 点 P がその平面上にあるかについては，平面ベクトルにおいては当たり前であり，
$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$
を満たす実数 s，t が「必ず存在する」．
空間においてはその限りではない．よって実数 s，t が存在すれば，点 P は平面 ABC 上にある．存在しなければ平面 ABC 上にはない．

第 46 講　空間ベクトル(3)

【CHECK & UP】

1 $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AG}=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$

$=2k\times\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)+\frac{3}{2}k\times\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right)+k\vec{c}$

$=2k\overrightarrow{AP}+\frac{3}{2}k\overrightarrow{AQ}+k\overrightarrow{AE}$

R が平面 PQE 上より　$2k+\frac{3}{2}k+k=1$　　$k=\frac{2}{9}$

よって　$\overrightarrow{AR}=\boldsymbol{\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}}$

「共面条件」の応用．A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，P($\vec{p}$) とし，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表したとき，その係数の和が 1 になれば，点 P が平面 ABC 上にある．
　よって，ある点を平面上に乗せたいときは，その平面上にある 3 点を終点とする 1 次独立な 3 つのベクトルで表すことが解法の選択肢の 1 つとなる．

2 t を実数とすると

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1,\ 3,\ -2)+t(0,\ -5,\ 2)$

$=(1,\ 3-5t,\ -2+2t)$

と表せる．

OB⊥OP より　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

よって　$1\times1-2\times(3-5t)+0\times(-2+2t)=0$　　$10t=5$　　$t=\frac{1}{2}$

したがって　$\mathbf{P}\left(\mathbf{1},\ \boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \mathbf{-1}\right)$

空間ベクトルにおける直線のベクトル方程式の考え方を用いることで，「直線上の点」を媒介変数を用いて「成分表示」で表すこととなる．
　O を始点としたベクトルで表す場合は，それが「直線上の点の座標」となる．

3 中心は線分 AB の中点より，

その座標は　$\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{2+4}{2},\ \frac{3-1}{2}\right)=(1,\ 3,\ 1)$

半径は　(1，3，1) と (3，4，−1) の距離で　$\sqrt{4+1+4}=3$

よって求める球面の方程式は　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9}$

球面または球の方程式は，円の方程式を作るときと同じ感覚で作ることができる．

第47講　整数の性質(1)

【CHECK & UP】

1 (1) $\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるのは，$\dfrac{756}{n}$ がある自然数の平方数になるとき．

$756=2^2\cdot3^3\cdot7$　より　題意を満たすのは

$n=3\cdot7,\ 3^3\cdot7,\ 2^2\cdot3\cdot7,\ 2^2\cdot3^3\cdot7$

つまり　$n=$**21，84，189，756** のときである．

(2) $108=2^2\cdot3^3$

$360=2^3\cdot3^2\cdot5$

$900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$

よって　最大公約数は　$2^2\cdot3^2=$**36**

最小公倍数は　$2^3\cdot3^3\cdot5^2=$**5400**

最大公約数，最小公倍数を求めるには，まずはそれぞれの数を素因数分解して，それぞれに含まれる素因数およびその指数を求める．
　最大公約数は，その共通な素因数で指数が最も小さいものを掛け合わせたものであり，最小公倍数は，すべての素因数で指数が最も大きいものを掛け合わせたものである．

2 a は7で割ると2余る数であることより

$a=7k+2$（k：整数）と表せる．

b は7で割ると5余る数であることより

$b=7l+5$（l：整数）　と表せる．

「除法の原理」によってある数で割ったとき余りがある数を表現できる．
　答えとしての「余り」は，割る数より小さい正の数で表す．ただし，除法の原理によって数を表現する場合はその限りではない．例えば $7k+2$ と $7k-5$ はともに7で割ると2余る数である．

(1) $3a+b=3(7k+2)+(7l+5)=7(3k+l)+11$

$=7(3k+l+1)+4$　　よって　余り **4**

(2) $ab=(7k+2)(7l+5)=7(7kl+5k+2l)+10=7(7kl+5k+2l+1)+3$

よって　余り **3**

(3) $a^2+b^2=(7k+2)^2+(7l+5)^2=7(7k^2+4k+7l^2+10l)+29$

$=7(7k^2+4k+7l^2+10l+4)+1$

よって　余り **1**

第 48 講　整数の性質(2)

【CHECK & UP】

1 (1) $72=15\cdot 4+12$

よって　72 と 15 の最大公約数は，15 と 12 の最大公約数に等しい

$15=12\cdot 1+3$

よって　15 と 12 の最大公約数は，12 と 3 の最大公約数に等しい

$12=3\cdot 4+0$

よって　72 と 15 の最大公約数は **3**

(2) $689=481\cdot 1+208$

$481=208\cdot 2+65$

$208=65\cdot 3+13$

$65=13\cdot 5+0$　　よって　689 と 481 の最大公約数は **13**

> 「互除法の原理」を利用して最大公約数を出す方法.
> 　最初は 2 数のうち大きい方を割られる数，小さい方の数を割る数として割り算を行う．次に，出てきた余りで小さい方の数を割る.
> 　これを繰り返し，割り切れたらそのときの割った数（余り）が求める最大公約数である.

2 (1) $101110_{(2)}=1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0$

$=32+0+8+4+2+0=\mathbf{46}$

$2403_{(5)}=2\cdot 5^3+4\cdot 5^2+0\cdot 5^1+3\cdot 5^0=250+100+0+3=\mathbf{353}$

(2) 右の計算により　$\mathbf{2201}_{(3)}$

		余り
3)	73	
3)	24	… 1
3)	8	… 0
	2	… 2

テキスト解答

第 25 講　指数関数・対数関数(1)

1 [1]　$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$ のとき，$a+a^{-1}$，$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ の値を求めよ．

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$ より　$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}})^2+(a^{-\frac{1}{2}})^2=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}=5^2-2=\mathbf{23}$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})(a-a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1})=5(23-1)=\mathbf{110}$

1 [2]　次の方程式を解け．

(1)　$4^x-2^{x+2}-32=0$　　(2)　$3^x+3^{-x}=2$

(1)　$4^x-2^{x+2}-32=0$　より　$(2^x)^2-4\cdot2^x-32=0$

$2^x=t$　とおくと　$t>0$

$t^2-4t-32=0$　$(t-8)(t+4)=0$

$t>0$ より　$t=8$　　よって　$2^x=8$　より　$\boldsymbol{x=3}$

(2)　$3^x+3^{-x}=2$ より　$3^x+\dfrac{1}{3^x}=2$　　$(3^x)^2-2\cdot3^x+1=0$

$3^x=t$　とおくと　$t>0$

$t^2-2t+1=0$　　$(t-1)^2=0$

$t>0$ より　$t=1$　　よって　$3^x=1$　より　$\boldsymbol{x=0}$

2　次の不等式を解け．

(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$

(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-\dfrac{1}{3^x}-6>0$

(1)　$2^{4x}-4^{x+1}>0$　より　$(4^x)^2-4\cdot4^x>0$

$4^x=t$　とおくと　$t>0$　　$t^2-4t>0$　　$t(t-4)>0$　　$t>0$ より　$t>4$

よって　$4^x>4$　　底 4 は 1 より大きいので　$\boldsymbol{x>1}$

(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x-\dfrac{1}{3^x}-6>0$　より　$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-6>0$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと　$t>0$　　$t^2-t-6>0$　　$(t+2)(t-3)>0$　　$t>0$ より $t>3$

よって　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>3$　　つまり　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$　　底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいので　$\boldsymbol{x<-1}$

3 (1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ の大小を比較せよ.

(2) 関数　$y=4^x-2^{x+3}+4$　$(0\leqq x\leqq 3)$　の最大値と最小値，および，そのときの x を求めよ.

(1) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$　　$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$　　$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}$

$6<8<9$　より　$6^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$　　よって　$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2) $y=4^x-2^{x+3}+4=(2^x)^2-8\cdot 2^x+4$

$2^x=t$ とおくと　$0\leqq x\leqq 3$ より　$1\leqq t\leqq 8$

このとき　$y=t^2-8t+4=(t-4)^2-12$

したがって　**最大値　4**　($t=8$　つまり　$\boldsymbol{x=3}$ **のとき**)

最小値　−12　($t=4$　つまり　$\boldsymbol{x=2}$ **のとき**)

第26講　指数関数・対数関数(2)

1　(1)　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$，$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)$ の式の値を求めよ．

(2)　$16^{\log_2 3}$　の値を求めよ．

(1)　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ より　$x+y=\sqrt{10}$　　$xy=2$

$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy=\log_2 2=1$

$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)=\dfrac{\log_2(x^2-xy+y^2)}{\log_2\sqrt{2}}=\dfrac{\log_2\{(x+y)^2-3xy\}}{\frac{1}{2}}=2\log_2 4=2\cdot 2=4$

(2)　$16^{\log_2 3}=2^{4\log_2 3}=2^{\log_2 3^4}=3^4=\mathbf{81}$

2　次の方程式，不等式を解け．

(1)　$\log_3 x-\log_9(x+2)=0$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqq\log_{\frac{1}{2}}2x$

(3)　$\log_3 x+2\log_x 3=3$　　(4)　$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2-3<0$

(1)　(真数)>0 より　$x>0$　かつ　$x>-2$　よって　$x>0$

このとき　$\log_3 x-\log_9(x+2)=0$　より　$\log_3 x-\dfrac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=0$

$\log_3 x-\dfrac{\log_3(x+2)}{2}=0$　　$2\log_3 x=\log_3(x+2)$　　$\log_3 x^2=\log_3(x+2)$

よって　$x^2=x+2$　　$x^2-x-2=0$　　$(x-2)(x+1)=0$　　$x>0$ より　$\boldsymbol{x=2}$

(2)　(真数)>0 より　$3-x>0$　かつ　$2x>0$　よって　$0<x<3$

このとき　$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqq\log_{\frac{1}{2}}2x$　において　底 $\dfrac{1}{2}<1$　より　$3-x\leqq 2x$　　$x\geqq 1$

よって　$\boldsymbol{1\leqq x<3}$

(3)　底の条件より $x>0$，$x\neq 1$　　これは (真数)>0 を満たす．

このとき　$\log_3 x+2\log_x 3=3$　より　$\log_3 x+2\cdot\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x}=3$

つまり　$\log_3 x+\dfrac{2}{\log_3 x}=3$　　$\log_3 x=t$ とおくと　$t+\dfrac{2}{t}=3$　$t^3-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$　　$t=1,\ 2$　つまり　$\log_3 x=1,\ 2$　　したがって　$\boldsymbol{x=3,\ 9}$

(4)　(真数)>0 より　$x>0$

このとき　$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2-3<0$　より　$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x-3\geqq 0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$ とおくと　$t^2-2t-3<0$　　$(t+1)(t-3)<0$　　よって　$-1<t<3$

つまり　$-1<\log_{\frac{1}{3}}x<3$　より $\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}<\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

底 $\dfrac{1}{3}<1$　より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{27}<x<3}$　($x>0$ を満たす)

3　次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$y=\left(\log_2\dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)$　$(2\leqq x\leqq 8)$

(2)　$y=\log_2(-x^2+4x+4)$　$(0\leqq x\leqq 3)$

(1)　$y=\left(\log_2\dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)=(\log_2 x^2-\log_2 4)(\log_2 4-\log_2 x)$

$=(2\log_2 x-2)(2-\log_2 x)$

$\log_2 x=t$ とおくと　$2\leqq x\leqq 8$ より　$1\leqq t\leqq 3$

このとき　$y=(2t-2)(2-t)=-2t^2+6t-4=-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

よって　**最大値**　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$（$t=\dfrac{3}{2}$　つまり　$x=2\sqrt{2}$　のとき）

最小値 $\boldsymbol{-4}$　（$t=3$　つまり　$x=8$　のとき）

(2)　$X=-x^2+4x+4=-(x-2)^2+8$　とおくと　$0\leqq x\leqq 3$ より　$4\leqq X\leqq 8$

このとき　$y=\log_2(-x^2+4x+4)=\log_2 X$（$4\leqq X\leqq 8$）の

最大値　**3**（$X=8$　つまり　$x=2$ のとき）

最小値　**2**（$X=4$　つまり　$x=0$ のとき）

第 27 講　指数関数・対数関数(3)

1　$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　18^{20} は何桁の数か．また最高位の数字，および末尾の数字を求めよ．

(2)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁であるような整数 n の範囲を求めよ．

(1)　$\log_{10}18^{20}=20\log_{10}2\cdot3^2=20(\log_{10}2+2\log_{10}3)=25.104$

よって　$18^{20}=10^{25.104}=10^{0.104}\times10^{25}$　　よって　18^{20} は**26 桁の数**である．

また $10^0=1$　　$10^{0.3010}=2$　より　$1<10^{0.104}<2$　　よって最高位の数字は **1**

さらに　18^n の 1 の位は　$n=1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$ のとき順に 8，4，2，6，8，…… であり，4 つ周期で 8，4，2，6 を繰り返す．　よって　$18^{20}=18^{4\times5}$ の 1 の位は　**6**

(2)　$(1.25)^n$ の整数部分が 2 桁より，$10^1\leqq(1.25)^n<10^2$　　つまり　$1\leqq\log_{10}1.25^n<2$

$$\log_{10}1.25^n=n\log_{10}1.25=n\left(\log_{10}\frac{10}{8}\right)=n(1-3\log_{10}2)=n(1-0.9030)=0.097n$$

よって　$1\leqq0.097n<2$　より　$\dfrac{1}{0.097}\leqq n<\dfrac{2}{0.097}$　　$10.3\cdots\leqq n<20.6\cdots$

したがって整数 n の範囲は　$\boldsymbol{11\leqq n\leqq20}$

2　(1)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{10000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

(2)　$2^x=3^y=12^z$，$xyz\neq0$　のとき，$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$　の値を求めよ．

(1)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{10000}$ より　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\log_{10}\dfrac{1}{10000}$　　$-n(\log_{10}2)<-4$

よって　$n>\dfrac{4}{\log_{10}2}=13.2\cdots\cdots$　より　求める自然数 n の最小値は　$\boldsymbol{n=14}$

(2)　$2^x=3^y=12^z=k$　とおくと，$xyz\neq0$ より $k\neq1$

$$x=\log_2k=\frac{\log_{10}k}{\log_{10}2}$$

$$y=\log_3k=\frac{\log_{10}k}{\log_{10}3}$$

$$z=\log_{12}k=\frac{\log_{10}k}{\log_{10}12}=\frac{\log_{10}k}{2\log_{10}2+\log_{10}3}$$

したがって　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{2\log_{10}2}{\log_{10}k}+\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}k}-\dfrac{2\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}k}=\boldsymbol{0}$

[3] ［1］　関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})-3$　について，次の問いに答えよ．

（1）　2^x+2^{-x} のとりうる値の範囲を求めよ．

（2）　$t=2^x+2^{-x}$ とおき，$f(x)$ を t を用いて表せ．また，$f(x)$ の最小値を求めよ．

（1）　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より　相加平均と相乗平均の関係から

$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$　　等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=0$ のとき．

したがって　$\boldsymbol{2^x+2^{-x}\geqq 2}$

（2）　$t=2^x+2^{-x}$ とおくと　(1)より　$t\geqq 2$

また，$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=t^2-2$

よって　$f(x)=t^2-2-t-3=\boldsymbol{t^2-t-5}$

$f(x)=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{21}{4}$　$(t\geqq 2)$　より　$t=2$　つまり　$x=0$ のとき　最小値　**－3**

[3] ［2］　$x>1$，　$y>1$ のとき，$\log_x y+\log_y x$ の最小値を求めよ．

$x>1$，　$y>1$ のとき　$\log_x y>0$

$$\log_x y+\log_y x=\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\geqq 2\sqrt{\log_x y.\frac{1}{\log_x y}}=2$$

等号成立は　$\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}$　　$(\log_x y)^2=1$　　$\log_x y=1$　　よって $x=y$ のとき．

したがって求める最小値は　**2**

第28講　微分法・積分法(1)

1　$f(x)=x^3-3x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x=1$ から $x=2$ まで変化するときの平均変化率を求めよ．

(2)　$x=c$ から $x=c+h$ まで変化するときの平均変化率，および $x=c$ における微分係数 $f'(c)$ を求めよ．

(3)　(2)で求めた微分係数が，(1)で求めた平均変化率と等しいとき，c の値を求めよ．

(1)　$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=(2^3-3\cdot2)-(1^3-3\cdot1)=\mathbf{4}$

(2)　平均変化率は

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{\{(c+h)^3-3(c+h)\}-(c^3-3c)}{h}$$

$$=\frac{3c^2h+3ch^2+h^3-3h}{h}=\boldsymbol{3c^2+3ch+h^2-3}$$

よって　$f'(c)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to0}(3c^2+3ch+h^2-3)=\boldsymbol{3c^2-3}$

(3)　$3c^2-3=4$　より　$c^2=\dfrac{7}{3}$　　よって　$\boldsymbol{c=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{3}}$

2　(1)　$y=x^3-5x+1$ 上の点 A$(2,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　点 $(1,\ 8)$ から曲線 $y=x^3-x^2-8x+8$ に引いた接線の方程式を求めよ．

(3)　点 $(3,\ 4)$ を通る傾き m の直線が，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に接するとき，m の値を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-5x+1$ とおくと，$f'(x)=3x^2-5$

点 A における接線の傾きは　$f'(2)=7$

よって求める接線の方程式は　$y=7(x-2)-1$　よって　$\boldsymbol{y=7x-15}$

(2)　$f(x)=x^3-x^2-8x+8$ とおくと

$f'(x)=3x^2-2x-8$ より　$f'(t)=3t^2-2t-8$

よって接点の x 座標を t とおくと，$x=t$ における接線の方程式は

$y=(3t^2-2t-8)(x-t)+t^3-t^2-8t+8$

つまり　$y=(3t^2-2t-8)x-2t^3+t^2+8$

この直線が点 $(1,\ 8)$ を通るとき，

$8=3t^2-2t-8-2t^3+t^2+8$

$t^3-2t^2+t+4=0$

$(t+1)(t^2-3t+4)=0$　　$t^2-3t+4=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$　より　$t=-1$

よって求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=-3x+11}$

(3)　$f(x)=-x^2+4x-3$ とおくと　$f'(x)=-2x+4$

$x=t$ における接線の方程式は

$y=(-2t+4)(x-t)-t^2+4t-3$

つまり　$y=(-2t+4)x+t^2-3$

この直線が $(3,\ 4)$ を通るとき

$4=(-2t+4)\cdot 3+t^2-3$

$t^2-6t+5=0$　　　$t=1,\ 5$

このとき接線の傾きはそれぞれ　$2,\ -6$　　したがって　$\boldsymbol{m=2,\ -6}$

> 3 ［1］ 2 曲線 $y=x^3-3x$ と $y=-x^2+ax+b$ が点 $(2,\ 2)$ で接するとき，a，b の値を求めよ．

$f(x)=x^3-3x$ とおくと　$f'(x)=3x^2-3$

$g(x)=-x^2+ax+b$ とおくと　$g'(x)=-2x+a$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が点 $(2,\ 2)$ で接するので

$f(2)=g(2)$　かつ　$f'(2)=g'(2)$

つまり　$2=-4+2a+b$　かつ　$9=-4+a$

よって　$\boldsymbol{a=13,\ b=-20}$

> 3 ［2］ 2 つの放物線　$y=-x^2$ と $y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ．

$y=-x^2$　より　$y'=-2x$

この放物線上の点 $(t,\ -t^2)$ における接線の方程式は

$y=-2t(x-t)-t^2$　　つまり　$y=-2tx+t^2$　……①

$y=x^2-2x+5$　より　$y'=2x-2$

この放物線上の点 $(s,\ s^2-2s+5)$ における接線の方程式は

$y=(2s-2)(x-s)+s^2-2s+5$　つまり　$y=(2s-2)x-s^2+5$　……②

①と②が一致するとき　$-2t=2s-2$　かつ　$t^2=-s^2+5$

これらより　$t=-1,\ 2$　　　このとき　$s=2,\ -1$

よって求める共通接線の方程式は $\boldsymbol{y=2x+1,\ y=-4x+4}$

第 29 講　微分法・積分法(2)

1 [1]　3 次関数　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる．このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ．

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　より　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$　……①

$f(x)$ が $x=1$ で極小値，$x=3$ で極大値をもつので，

$f'(x)=3a(x-1)(x-3)=3ax^2-12ax+9a$　$(a<0)$　……②　とおける．

①，②を係数比較して　$2b=-12a$，$c=9a$　　よって　$b=-6a$

このとき　$f(x)=ax^3-6ax^2+9ax+d$

$f(1)=-2$，$f(3)=2$　より　$4a+d=-2$，$d=2$

よって　$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=6}$，$\boldsymbol{c=-9}$，$\boldsymbol{d=2}$　($a<0$ を満たす)

1 [2]　(1)　3 次関数　$f(x)=x^3+(a-2)x^2-3ax-2$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を求めよ． (2)　関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の極値を求めよ．

(1)　$f'(x)=3x^2+2(a-2)x-3a$

$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもてばよい．

よって $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+9a>0 \qquad a^2+5a+4>0 \qquad (a+4)(a+1)>0$$

したがって　$\boldsymbol{a<-4,\ -1<a}$

(2)　$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$a>0$ のとき　$x=-a$ で極大値 $2a^3$

$x=a$ で極小値 $-2a^3$　をとる

$a=0$ のとき　$f'(x)=3x^2\geqq 0$　より　$f(x)$ は単調増加．よって**極値はない**

$a<0$ のとき　$x=a$ で極大値 $-2a^3$

$x=-a$ で極小値 $2a^3$　をとる

2　関数 $y=x^3-3\|x^2-1\|-1$ の極値を求めよ．

$$y=x^3-3|x^2-1|-1=\begin{cases} x^3-3x^2+2=f_1(x) & (x\leqq -1,\ 1\leqq x) \\ x^3+3x^2-4=f_2(x) & (-1\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$ とおく．

$$y'=\begin{cases} f_1{}'(x)=3x^2-6x=3x(x-2) & (x<-1,\ 1<x) \\ f_2{}'(x)=3x^2+6x=3x(x+2) & (-1<x<1) \end{cases}$$

x		-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	
y'	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$
y	↗	-2	↘	-4	↗	0	↘	-2	↗

よって

極大値　-2（$x=-1$）と　0（$x=1$）

極小値　-4（$x=0$）と　-2（$x=2$）

3　$a>0$ のとき，関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を求めよ．

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$　$(a>0)$

ここで　$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{4}{27}a^3$ より　$x^3-2ax^2+a^2x-\dfrac{4}{27}a^3=0$

$\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2\left(x-\dfrac{4}{3}a\right)=0$　　$x=\dfrac{a}{3},\ \dfrac{4}{3}a$

x	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{4}{27}a^3$	↘	0	↗

$1<\dfrac{a}{3}$　つまり　$a>3$ のとき　最大値　$f(1)=a^2-2a+1$

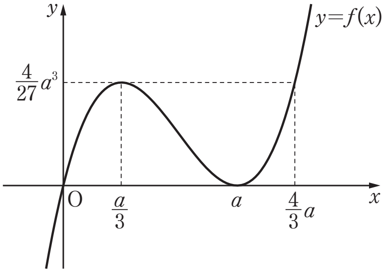
$\dfrac{a}{3}\leqq 1\leqq\dfrac{4}{3}a$　つまり　$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　最大値　$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{4}{27}a^3$

$\dfrac{4}{3}a<1$　つまり　$0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき　最大値　$f(1)=a^2-2a+1$

以上より

$0<a<\dfrac{3}{4}$，$3<a$ のとき　最大値　a^2-2a+1

$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　最大値　$\dfrac{4}{27}a^3$



第 30 講　微分法・積分法(3)

1　x についての方程式 $3x^4-4x^3-12x^2-a=0$ が次の条件をみたすように，定数 a の値の範囲を求めよ．

(1)　4 個の異なる実数解をもつ．

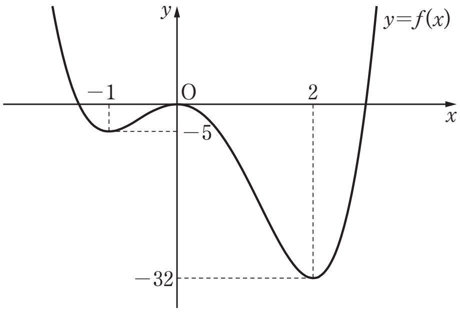
(2)　2 個の異なる正の実数解のみもつ．

$3x^4-4x^3-12x^2-a=0$　より　$3x^4-4x^3-12x^2=a$

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ とおくと，

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x^2-x-2)=12x(x+1)(x-2)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-5	↗	0	↘	-32	↗



$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数を考える．

(1)　グラフより $\boldsymbol{-5<a<0}$

(2)　グラフより $\boldsymbol{-32<a<-5}$

2　点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-x$ へ異なる 3 本の接線が引けるとする．このような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ．

$y=x^3-x$ より　$y'=3x^2-1$

$x=t$ における接線は　$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$　つまり　$y=(3t^2-1)x-2t^3$　……①

①が $(a,\ b)$ を通るとき　$b=(3t^2-1)a-2t^3$　つまり　$2t^3-3at^2+a+b=0$　……②

3 次関数は接点が異なれば接線も異なる．よって②が異なる 3 実数解をもてば，

それに応じて①より条件を満たす 3 本の接線が引ける．

$f(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とおくと，$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$a=0$ のとき　$f'(t)=6t^2\geqq 0$ より　$f(t)$ は単調増加．

よって $f(t)=0$ は 1 解のみもち不適．

$a\neq 0$ のとき　$f(t)$ は 2 極値 $f(0)$，$f(a)$ をもつ．

よって　$f(0)\times f(a)<0$　であれば②は異なる 3 実数解をもつ．

$f(0)\times f(a)=(a+b)(-a^3+a+b)<0$

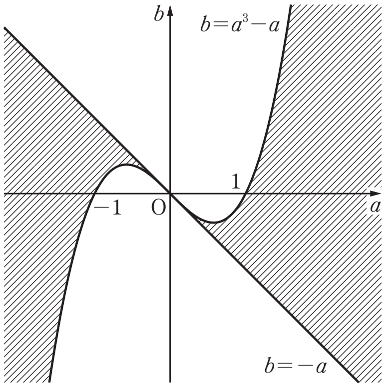
$\begin{cases} a+b>0 \\ -a^3+a+b<0 \end{cases}$ または $\begin{cases} a+b<0 \\ -a^3+a+b>0 \end{cases}$

つまり

$\begin{cases} b>-a \\ b<a^3-a \end{cases}$ または $\begin{cases} b<-a \\ b>a^3-a \end{cases}$

したがって，求める存在範囲は右図斜線部.

（境界含まず）



3 $x \geqq 0$ において常に不等式　$x^3-3ax^2+4a>0$ が成り立つように定数 a の範囲を定めよ.

$f(x)=x^3-3ax^2+4a$　とおくと　$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$2a<0$　つまり　$a<0$ のとき

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=4a$

よって　$4a>0$　つまり　$a>0$ であればよいが,

これは $a<0$ を満たさず不適.

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$4a$	↗

$2a=0$　つまり　$a=0$ のとき

$f'(x)=3x^2 \geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加.

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=4a$

よって　$4a>0$　つまり　$a>0$　であればよいが，$a=0$ を満たさず不適.

$2a>0$　つまり　$a>0$ のとき

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(2a)=-4a^3+4a$

よって　$-4a^3+4a>0$　　$a(a+1)(a-1)<0$

$a<-1$，$0<a<1$　　　$a>0$ より　$0<a<1$

x	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4a$	↘	$-4a^3+4a$	↗

以上より，求める a の範囲は　$\boldsymbol{0<a<1}$

第 31 講　微分法・積分法(4)

1 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx$

(2) $\int_{1}^{2}(t+1)(t^2-1)dt+\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

(1) $\int_{-3}^{1}(2x^2+x+1)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{1}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-\left(-18+\frac{9}{2}-3\right)=\boldsymbol{\frac{56}{3}}$

(2) $\int_{1}^{2}(t+1)(t^2-1)dt+\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2-1)dt$

$=\int_{-2}^{2}(t+1)(t^2-1)dt=\int_{-2}^{2}(t^3+t^2-t-1)dt$

$=2\int_{0}^{2}(t^2-1)dt=2\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{0}^{2}=2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

2 次の定積分を求めよ.

(1) $\int_{-1}^{3}x|x-2|dx$

(2) $\int_{0}^{3}|x^2-3x+2|dx$

(1) $\int_{-1}^{3}x|x-2|dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}=0+\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(2) $\int_{0}^{3}|x^2-3x+2|dx$

$=\int_{0}^{1}(x^2-3x+2)dx+\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx+\int_{2}^{3}(x^2-3x+2)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{2}^{3}$

$=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{11}{6}}$

3 [1]　x の関数　$f(x)=\int_{0}^{x}t(t^2-1)dt$　の極値を求めよ.

$f(x)=\int_{0}^{x}t(t^2-1)dt=\int_{0}^{x}(t^3-t)dt=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$　より

$f'(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$

よって

極大値は　$f(0)=0$

x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗

極小値は　$f(-1)=-\dfrac{1}{4}$　および　$f(1)=-\dfrac{1}{4}$

3 ［2］　等式　$f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1$　を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$f(x)=\int_0^1 tf(t)dt+\int_0^1 xf(t)dt+1=x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 tf(t)dt+1$

$\int_0^1 f(t)dt=a$，$\int_0^1 tf(t)dt=b$　とおくと　$f(x)=ax+b+1$

このとき

$a=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (at+b+1)dt=\left[\dfrac{a}{2}t^2+(b+1)t\right]_0^1=\dfrac{a}{2}+b+1$

$b=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(at+b+1)dt=\int_0^1 \{at^2+(b+1)t\}dt=\left[\dfrac{a}{3}t^3+\dfrac{b+1}{2}t^2\right]_0^1=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b+1}{2}$

より　$a-2b=2$，$2a-3b=-3$　　よって　$a=-12$，$b=-7$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=-12x-6}$

第32講　微分法・積分法(5)

1 (1) 等式 $\int(x-\alpha)^2dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$ （C は定数） を証明せよ．

(2) 曲線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸，および直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) C' を定数とすると

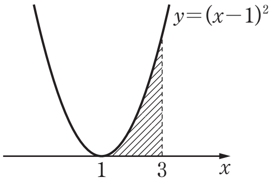
$$\int(x-\alpha)^2dx=\int(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx=\frac{1}{3}x^3-\alpha x^2+\alpha^2x+C'$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2x-\alpha^3)+\frac{\alpha^3}{3}+C'=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha^3}{3}+C'$$

$\frac{\alpha^3}{3}+C'$ は定数より　$\int(x-\alpha)^2dx=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$（$C$ は定数）が成り立つ．

(2) 求める面積は

$$\int_1^3(x^2-2x+1)dx=\int_1^3(x-1)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3=\frac{1}{3}\cdot2^3-0=\mathbf{\frac{8}{3}}$$



2 (1) 等式 $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ．

(2) 曲線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$

$$=\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

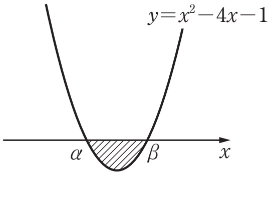
(2) $x^2-4x-1=0$　より　$x=2\pm\sqrt{5}$

よって　$\alpha=2-\sqrt{5}$，$\beta=2+\sqrt{5}$ とおくと，求める面積は

$$\int_\alpha^\beta-(x^2-4x-1)dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

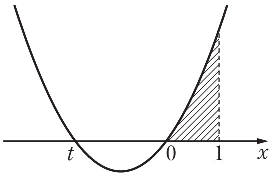
$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{5})^3=\mathbf{\frac{20\sqrt{5}}{3}}$$



3	$f(t)=\int_0^1 \lvert x^2-tx\rvert dx$　とするとき，$f(t)$ の最小値と最小値を与える t の値を求めよ．

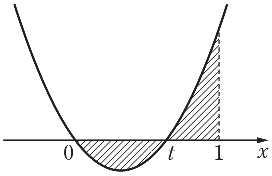
$y=\lvert x^2-tx\rvert=\lvert x(x-t)\rvert$

$t \leqq 0$ のとき



$$f(t)=\int_0^1 (x^2-tx)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{t}{2}$$

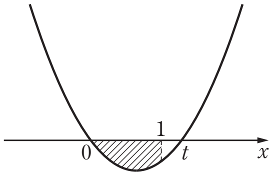
$0<t<1$ のとき



$$f(t)=\int_0^t (-x^2+tx)dx+\int_t^1 (x^2-tx)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{t}{2}x^2\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_t^1=\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}$$

$t \geqq 1$ のとき



$$f(t)=\int_0^t (-x^2+tx)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{t}{2}x^2\right]_0^t=\frac{t}{2}-\frac{1}{3}$$

よって　$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{3} & (t\leqq 0) \\ \dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{3} & (0<t<1) \\ \dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{3} & (1\leqq t) \end{cases}$

$t \leqq 0$ のとき$f(t)$ は単調減少，$1\leqq t$ のとき$f(t)$ は単調増加．

$0<t<1$ のとき

$$f'(t)=t^2-\frac{1}{2}=\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	

以上より　**$f(t)$ の最小値は　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$　（$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき）**

第 33 講　微分法・積分法(6)

1　(1)　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x+7$，および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ．

(2)　曲線 $y=x^3-4x$ とその曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線とが囲む図形の面積を求めよ．

(1)　$y=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$

$y=-x^2+2x+3$ と $y=-2x+7$　より

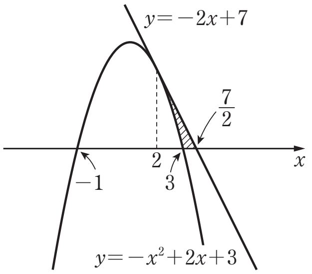
$-x^2+2x+3=-2x+7$　　$(x-2)^2=0$　　$x=2$

よって求める面積は

$$\int_2^3\{(-2x+7)-(-x^2+2x+3)\}dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx$$

$$=\int_2^3(x-2)^2dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot1$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^3+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{7}{12}}$$



(2)　$y=x^3-4x$　より　$y'=3x^2-4$

$(1,\ -3)$ における接線は　$y=-(x-1)-3$　つまり　$y=-x-2$

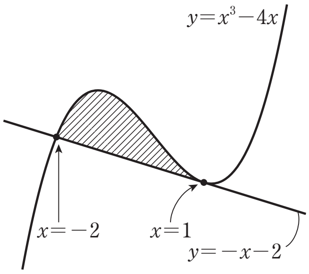
$y=x^3-4x$ と $y=-x-2$ より

$x^3-3x+2=0$　　$(x-1)^2(x+2)=0$　　$x=1,\ -2$

求める面積は

$$\int_{-2}^1\{(x^3-4x)-(-x-2)\}dx=\int_{-2}^1(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\boldsymbol{\frac{27}{4}}$$



2　放物線　$y=-x^2+3x$　と x 軸で囲まれた図形の面積が直線 $y=ax$ で 2 等分されるとき，a の値を求めよ．

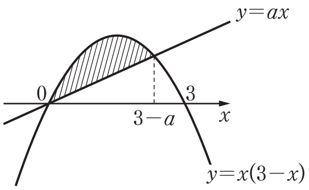
$y=x(3-x)=-x^2+3x$　と　$y=ax$ より

$x^2+(a-3)x=0$　　$x(x+a-3)=0$　　$x=0,\ 3-a$

よって，$y=x(3-x)$ と $y=ax$ で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\int_0^{3-a}\{x(3-x)-ax\}dx$$

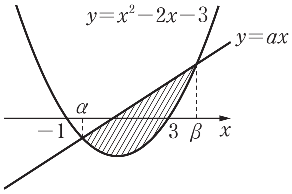
$$=-\int_0^{3-a}x(x+a-3)dx=\frac{1}{6}(3-a)^3$$



題意より　$S(a)=S(0)\times\frac{1}{2}$　　つまり　$\frac{1}{6}(3-a)^3=\frac{1}{6}\cdot3^3\times\frac{1}{2}$

$(3-a)^3=\frac{27}{2}$　　$3-a=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$　　よって　$\boldsymbol{a=3-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}}$

3　放物線　$y=x^2-2x-3$ と直線 $y=ax$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ の最小値を求めよ．



$y=x^2-2x-3$ と $y=ax$　より　$x^2-2x-3=ax$

$x^2-(a+2)x-3=0$　この2解を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと，

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=a+2$　　$\alpha\beta=\mathbf{-3}$

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\{ax-(x^2-2x-3)\}dx=\int_\alpha^\beta\{-x^2+(a+2)x+3\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(a+2)^2+12\}^{\frac{3}{2}}$$

よって求める $S(a)$ の最小値は　$S(-2)=\frac{1}{6}\cdot 12^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{12}^{\,3}=\mathbf{4\sqrt{3}}$

第 34 講　数列(1)

1　第 10 項が 230，第 25 項が -220 の等差数列について，次の問いに答えよ．

(1)　初項と公差を求め，一般項を n を用いて表せ．

(2)　初項から第 n 項までの和を n を用いて表せ．

(3)　初項から第 n 項までの和の最大値と，それをとる n を求めよ．

初項 a　公差 d の等差数列の一般項は　$a_n=a+(n-1)d$　と表される．

(1)　$a_{10}=230$　より　$a+9d=230$

$a_{25}=-220$　より　$a+24d=-220$

これらより　$a=500,\ d=-30$

よって求める一般項は　$a_n=500+(n-1)\cdot(-30)=\boldsymbol{-30n+530}$

(2)　初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n=\frac{n}{2}\{500+(-30n+530)\}=\frac{n}{2}(1030-30n)=\boldsymbol{5n(103-3n)}$$

(3)　$a_n<0$　より　$-30n+530<0$　$n>\dfrac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$

よって　a_n がはじめて負になるのは　第 18 項

よって求める和の最大は　第 **17** 項までの和 $S_{17}=5\cdot17\cdot(103-51)=\mathbf{4420}$（$n=17$ のとき）

2　等比数列 $\{a_n\}$ において，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3,\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ．

初項 a　公比 r　とする．

$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3$　　つまり　$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^9=3$　……①

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{10}}=2$　より　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ar}+\dfrac{1}{ar^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{ar^9}=2$

$r^9+r^8+\cdots\cdots+r+1=2ar^9$　　　$ar^9+ar^8+\cdots\cdots ar+a=2a^2r^9$

①より　$3=2a^2r^9$　　　$a^2r^9=\dfrac{3}{2}$

このとき　$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot\cdots\cdots ar^9=a^{10}r^{45}=(a^2r^9)^5=\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\boldsymbol{\dfrac{243}{32}}$

3　[1]　2 つの正の数 a，b がある．a と b の間に 1 つの数 m を入れて，a，m，b がこの順に等差数列，等比数列をなすような m の値をそれぞれ求めよ．

3 つの数 a，m，b がこの順に

等差数列をなす条件は　$a+b=2m$　　よって　$\boldsymbol{m=\dfrac{a+b}{2}}$

等比数列をなす条件は　$ab=m^2$　　よって　$\boldsymbol{m=\sqrt{ab}}$　(>0)

> **3** ［2］ 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ が 3 つの実数解 α，β，γ（$\alpha<\beta<\gamma$）をもつとする．α，β，γ はある順で等差数列となり，またある順で等比数列となる．このとき，実数 a，b，α，β，γ の値を求めよ．

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-a$　……①　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$　……②　$\alpha\beta\gamma=-8$　……③

また，α，β，γ（$\alpha<\beta<\gamma$）が等差数列をなすとき

$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\beta$　つまり　$\alpha+\gamma=2\beta$　……④

③より α，β，γ はすべて負，または 2 数が正で 1 数が負である．

α，β，γ がすべて負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より等比中項は β　よって　$\beta^2=\alpha\gamma$

③より　$\beta^3=-8$　よって　$\beta=-2$

このとき　④より　$\alpha+\gamma=-4$　　③より　$\alpha\gamma=4$

したがって α，γ は 2 次方程式　$t^2+4t+4=0$ の 2 解．よって　$\alpha=\gamma=-2$

ゆえに $\alpha<\beta<\gamma$ を満たさず不適．

α，β，γ のうち 2 数が正で 1 数が負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より $\alpha<0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ である．

α，β，γ が等比数列をなすとき，公比は負であり，等比中項は α である．

よって　$\alpha^2=\beta\gamma$　　③より　$\alpha^3=-8$　よって　$\alpha=-2$

このとき　④より　$-2+\gamma=2\beta$　　③より　$\beta\gamma=4$

これらと $\alpha<\gamma$ より　$\beta=1$，$\gamma=4$　であり，①，②より　$a=-3$，$b=-6$ である．

以上より　$\boldsymbol{a=-3,\ b=-6,\ \alpha=-2,\ \beta=1,\ \gamma=4}$

第35講　数列(2)

1 [1]　恒等式　$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示せ.

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$　より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)$

(左辺)$=(2^4-1^4)+(3^4-2^4)+(4^4-3^4)+\cdots\cdots+\{(n+1)^4-n^4\}=(n+1)^4-1$

(右辺)$\displaystyle=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$\displaystyle=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$　より

$\displaystyle(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$

$\displaystyle4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$

$=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}=n^2(n+1)^2$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

1 [2]　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

(1)　1，1＋2，1＋2＋3，……

(2)　1，1＋2，1＋2＋4，……

(3)　$1\cdot n$，$2\cdot(n-1)$，$3\cdot(n-2)$，……，$(n-1)\cdot2$，$n\cdot1$

(1)　この数列の第 n 項は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

よって求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$

(2)　この数列の第 n 項は　$1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

よって求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}$

(3)　この数列の第k 項は　$k(n-k+1)=-k^2+(n+1)k$

よって求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

2 次の和を求めよ.

(1) $1\cdot1+4\cdot2+7\cdot2^2+10\cdot2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot2^{n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

(1) $S_n=1\cdot1+4\cdot2+7\cdot2^2+10\cdot2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot2^{n-1}$ とおくと

$$2S_n=1\cdot2+4\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots\cdots+(3n-5)\cdot2^{n-1}+(3n-2)\cdot2^n$$

$$S_n-2S_n=1\cdot1+3\cdot2+3\cdot2^2+\cdots\cdots+3\cdot2^{n-1}-(3n-2)\cdot2^n$$

$$=1+\frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}-(3n-2)\cdot2^n=1+3\cdot2^n-6-(3n-2)\cdot2^n$$

$-S_n=(-3n+5)\cdot2^n-5$　　よって求める和は　$\boldsymbol{S_n=(3n-5)\cdot2^n+5}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}$$

3　次の数列の一般項を求めよ．

　1，2，4，10，23，46，82，134，……

$\{a_n\}$：1，2，4，10，23，46，82，134，……　とおくと

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は　1，2，6，13，23，……

さらに数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ は　1，4，7，10，……

数列 $\{c_n\}$ は等差数列より　$c_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)=1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)=\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{2}n+3$$

これは $n=1$ のときも成立する．

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-7k+6)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-7\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)$$　これは $n=1$ のときも成立する．

よって　求める数列の一般項は　$\boldsymbol{\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)}$

第 36 講　数列(3)

1　(1)　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ について, $\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-3$ であるとき, a_n の一般項を求めよ.

(1)　$n=1$ のとき

$S_1=1\cdot2=2$　　よって　$a_1=2$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n=2n$

この式は $n=1$ のときも成立する.

したがって　$\boldsymbol{a_n=2n}$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-3=S_n$　とおくと, $n=1$ のとき　$S_1=2^1-3=-1$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-3)-(2^{n-1}-3)=2\cdot2^{n-1}-1\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$

この式は $n=1$ のときは成立しない

したがって　**$n\geqq2$ のとき　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}}$, $\boldsymbol{a_1=-1}$**

2　正の奇数を小さい順に並べた数列を, 次のように第 n 群に $2n-1$ 個の項を含むように分ける.

1 | 3, 5, 7 | 9, 11, 13, 15, 17 | 19, ……

このとき次の問いに答えよ.

(1)　第 n 群の最初の数を n を用いて表せ.

(2)　第 n 群の総和を n を用いて表せ.

(3)　777 は第何群の何番目にある数か.

(1)　もとの数列の第 n 項は　$2n-1$ である.

また, 第 n 群の最後の数は, もとの数列の $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$ 番目の項である.

よって, 第 n 群の最初の数は, もとの数列の第 $(n-1)^2+1$ 項である.

したがって求める数は　$2\{(n-1)^2+1\}-1=\boldsymbol{2n^2-4n+3}$

(2)　第 n 群の最後の数は　$2n^2-1$

よって, 求める総和は初項 $2n^2-4n+3$　末項 $2n^2-1$　項数 $2n-1$　の等差数列の和である.

したがって　$\dfrac{2n-1}{2}\{(2n^2-4n+3)+(2n^2-1)\}=\boldsymbol{(2n-1)(2n^2-2n+1)}$

(3)　$2n-1=777$ より　$n=389$　　よって　777 は, もとの数列の第 389 項

これが第 n 群に属するとすると

$(n-1)^2 < 389 \leqq n^2$　　これを満たす自然数 n は $n=20$ のみ

第 19 群までに　$19^2=361$ 項ある.

したがって 777 は**第 20 群の 28 番目の項**である.

3　次の数列について，次の問いに答えよ.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \cdots\cdots$

(1)　$\frac{7}{18}$ は第何項になるか.

(2)　第 200 項を求めよ.

(3)　初項から第 200 項までの総和を求めよ.

与えられた数列を，次のように第 n 群に n 個の数が含まれるように分ける.

$$\frac{1}{2} \Big| \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \Big| \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \Big| \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \Big| \cdots\cdots$$

第 n 群の初項は　$\dfrac{1}{n+1}$　末項は　$\dfrac{n}{n+1}$　であり，

第 n 群の末項はもとの数列の　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 番目の数である.

(1)　$\dfrac{7}{18}$ は第 17 群の 7 番目の項である.

第 16 群までに　$\dfrac{1}{2}\cdot 16\cdot 17=136$ 項ある．よって，$\dfrac{7}{18}$ は**第 143 項**である.

(2)　第 200 項が第 n 群に属するとすると，

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 200 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

$(n-1)n < 400 \leqq n(n+1)$　　これを満たす自然数は　$n=20$ のみ

よって第 200 項は第 20 群に属する.

第 19 群までに　$\dfrac{1}{2}\cdot 19\cdot 20=190$ 項ある.

よって求める数は第 20 群の 10 番目の数，つまり　$\boldsymbol{\dfrac{10}{21}}$　である.

(3)　第 n 群に含まれる数の和は　$\dfrac{1}{2}n\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}n$

よって求める和は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{19}\frac{1}{2}k+\left(\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\cdots\cdots+\frac{10}{21}\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 20+\frac{10}{2}\left(\frac{1}{21}+\frac{10}{21}\right)$$

$$=95+\frac{55}{21}=\boldsymbol{\frac{2050}{21}}$$

第 37 講　数列(4)

1　次の条件によって与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=6$　　(2)　$a_1=2,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n-3n+1$　　(4)　$a_1=-2,\ 4a_{n+1}=5a_n+4$

(1)　$a_{n+1}=a_n+6$　より　数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 6 の等差数列

よって　$a_n=1+(n-1)\cdot6=\boldsymbol{6n-5}$

(2)　$a_{n+1}=-2a_n$　より数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 -2 の等比数列

よって　$a_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{-(-2)^n}$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=2^n-3n+1$ である.

よって $n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-3k+1)=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)$$

$$=2^n-\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-2$$　これは $n=1$ のときも成立する.

ゆえに　$a_n=\boldsymbol{2^n-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{5}{2}n-2}$

(4)　$a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n+1$　より　$a_{n+1}+4=\dfrac{5}{4}(a_n+4)$

よって数列 $\{a_n+4\}$ は初項 $a_1+4=2$，公比 $\dfrac{5}{4}$ の等比数列である.

したがって　$a_n+4=2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=\boldsymbol{2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}-4}$

2　次の条件によって与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$　　(2)　$a_1=1,\ na_{n+1}=2(n+1)a_n$

(1)　a_1 および漸化式の形より，帰納的にすべての自然数 n で $a_n>0$ である.

与えられた漸化式において，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+4$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4,\ b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$

$b_{n+1}+2=3(n_n+2),\ b_1+2=\dfrac{5}{2}$　より　数列 $\{b_n+2\}$ は初項 $\dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列.

よって　$b_n+2=\dfrac{5}{2}\cdot3^{n-1}$　より　$b_n=\dfrac{5}{2}\cdot3^{n-1}-2=\dfrac{5\cdot3^{n-1}-4}{2}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5\cdot3^{n-1}-4}}$

(2)　$na_{n+1}=2(n+1)a_n$　より　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{a_n}{n}$

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n$　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$

よって　$b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$　より　$\dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$　　したがって　$a_n=\boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}}$

3　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=2$，$b_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=3a_n+2b_n$ で定める．

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α，β の組を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

---

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ の左辺に $a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=3a_n+2b_n$　を代入して

$2a_n+3b_n-\alpha(3a_n+2b_n)=\beta a_n-\alpha\beta b_n$

つまり　$(2-3\alpha)a_n+(3-2\alpha)b_n=\beta a_n-\alpha\beta b_n$

これがすべての自然数 n で成り立つための条件は

$2-3\alpha=\beta$，$3-2\alpha=-\alpha\beta$　　これらより　$(\alpha,\ \beta)=\boldsymbol{(-1,\ 5),\ (1,\ -1)}$

(2)　(1)より　与えられた漸化式から次の式が導かれる．

$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$，$a_1+b_1=3$

$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$，$a_1-b_1=1$

よって　数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 3，公比 5 の等比数列であり，

数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 1，公比 -1 の等比数列である．

したがって　$a_n+b_n=3\cdot 5^{n-1}$　……①　　　$a_n-b_n=(-1)^{n-1}$　……②

(①＋②)÷2 より　$a_n=\boldsymbol{\dfrac{3\cdot 5^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}}$

(①－②)÷2 より　$b_n=\boldsymbol{\dfrac{3\cdot 5^{n-1}-(-1)^{n-1}}{2}}$

第 38 講　数列(5)

1 [1]　n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$$

$\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{2(n+2)}$　……①について

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　(左辺)$=\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{6}$　(右辺)$=\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{6}$　より　①は成り立つ．

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{2(k+2)}$$

このとき

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k}{2(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{k(k+3)+2}{2(k+3)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(k+2)(k+3)}=\frac{k+1}{2(k+3)}$$　より

①は $n=k+1$ のときも成り立つ．

[Ⅰ]　[Ⅱ]より，①はすべての自然数 n について成り立つ．

1 [2]　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$　……①　について

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　(左辺)$=2$　　(右辺)$=2\cdot 1=2$　より　①は成り立つ．

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)$$

このとき

$$(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot\{2(k+1)\}$$

$$=2\times(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k\times(2k+1)$$

$$=2\times 2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\times(2k+1)=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)$$　より

①は $n=k+1$ のときも成り立つ．

[Ⅰ]　[Ⅱ]より，①はすべての自然数 n について成り立つ．

2 [1]　n を自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$　すなわち　$\displaystyle\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$　……①　について

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　(左辺)$=1$　(右辺)$=1$　より①は成り立つ．

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{k}$$

このとき

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

ここで　$\displaystyle\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k(k+1)-k}{k(k+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$　より

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k+1}$$

つまり①は $n=k+1$ のときも成り立つ．

[Ⅰ]　[Ⅱ]より，すべての自然数 n について　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$　が成り立つ．

2 [2]　n が自然数のとき，不等式　$n!\geqq 2^{n-1}$　が成り立つことを示せ．

$n!\geqq 2^{n-1}$　……①　について

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　(左辺)$=1$　(右辺)$=1$　より①は成り立つ．

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$k!\geqq 2^{k-1}$

このとき　$(k+1)!=(k+1)\cdot k!\geqq (k+1)\cdot 2^{k-1}$

ここで　$(k+1)\cdot 2^{k-1}-2^k=(k+1)\cdot 2^{k-1}-2\cdot 2^{k-1}=(k-1)\cdot 2^{k-1}\geqq 0$　より

$(k+1)!\geqq 2^k$　　つまり　①は $n=k+1$ のときも成り立つ．

[Ⅰ]　[Ⅱ]より，すべての自然数 n について　$n!\geqq 2^{n-1}$　が成り立つ．

3 [1]　$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求め，一般項 a_n を推定せよ．

(2)　(1)で求めた一般項 a_n が正しいことを数学的帰納法で証明せよ．

(1)　$a_2=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=\mathbf{-3}$　　$a_3=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=\mathbf{-5}$

$a_4=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=\mathbf{-7}$　　$a_5=(-7)^2+2\cdot4\cdot(-7)-2=\mathbf{-9}$

よって　$a_n=\mathbf{-2n+1}$　……①　と推測される．

(2)　$n=1$ のとき　推測により①は明らか

$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると　$a_k=-2k+1$

このとき　$a_{k+1}=a_k{}^2+2ka_k-2=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2=-2k-1$　より

$n=k+1$ のときも①が成り立つ．

したがって　すべての自然数 n で　$a_n=-2n+1$　が成り立ち，推測は正しい．

3 [2]　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．すべての自然数 n について　$a_n>1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$a_n>1$　……①について

$n=1$ のとき　$a_1=2>1$ より①は成り立つ．

$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると　$a_k>1$　より　$\dfrac{1}{a_k}<1$

このとき　$a_{k+1}=2-\dfrac{1}{a_k}>2-1=1$　よって　$n=k+1$　のときも①が成り立つ．

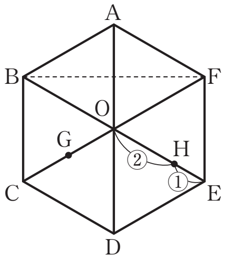
したがって　すべての自然数 n で①が成り立つ．

第 39 講　平面ベクトル(1)

1　正六角形 ABCDEF において，その中心を O，線分 OC の中点を G，線分 OE を 2：1 に内分する点を H とする．$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{CH}$，$\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{BF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}=\vec{a}$　　$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CD}=\vec{b}$

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$



$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\vec{a}+\vec{b})=\boldsymbol{2\vec{a}+2\vec{b}}$　　$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OG}=\boldsymbol{\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}}$

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}=\boldsymbol{-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$　　$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}}$

2　[1]　$\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく．$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{2}$ となるような k の値を求めよ．また，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ．

(2)　$\vec{c}=(5,\ 4)$ を　$x\vec{a}+y\vec{b}$ の形で表せ．

(1)　$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}=(1,\ -1)+k(3,\ 2)=(3k+1,\ 2k-1)$

$|\vec{p}|=\sqrt{(3k+1)^2+(2k-1)^2}=\sqrt{13k^2+2k+2}$

$|\vec{p}|=\sqrt{2}$　より　$13k^2+2k+2=2$　　$13k^2+2k=0$　　$k=\boldsymbol{0,\ -\frac{2}{13}}$

$|\vec{p}|=\sqrt{13\left(k+\frac{1}{13}\right)^2+\frac{25}{13}}$　よって　$k=-\frac{1}{13}$ のとき　$|\vec{p}|$ は最小値　$\sqrt{\frac{25}{13}}=\boldsymbol{\frac{5}{\sqrt{13}}}$ をとる．

(2)　$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$　より　$(5,\ 4)=x(1,\ -1)+y(3,\ 2)=(x+3y,\ -x+2y)$

$x+3y=5,\ -x+2y=4$　　よって　$x=-\frac{2}{5},\ y=\frac{9}{5}$

よって　$\vec{c}=\boldsymbol{-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{9}{5}\vec{b}}$

2　[2]　3 点 A(1, 2)，B(3, 5)，C(4, 8) について，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を成分で表し，その大きさを求めよ．

(2)　D$(x,\ y)$ とする．四角形 ABCD が平行四辺形になるように x，y の値を定めよ．

(1)　$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{(2,\ 3)}$　　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+9}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{(3,\ 6)}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

(2)　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　つまり　$(2,\ 3)=(4-x,\ 8-y)$　であればよい．

よって　$4-x=2$，$8-y=3$　より　$x=\mathbf{2}$，$y=\mathbf{5}$

3 (1) $|\vec{a}|=3$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ.

(2) $\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ において，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行であるとき，実数 x の値を求めよ．また，このとき $|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ.

(1) $\vec{a}$ と平行で大きさが1のベクトルを $k\vec{a}$ とすると

$|k\vec{a}|=1$　より　$|k|=\dfrac{1}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{3}$　よって　$k=\pm\dfrac{1}{3}$

したがって求めるベクトルは　$\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{a}}$

(2) $\vec{a}+3\vec{b}=(x+6,\ -10)$　　$\vec{a}-\vec{b}=(x-2,\ 2)$

$(\vec{a}+3\vec{b})\parallel(\vec{a}-\vec{b})$ より　$(x+6):(-10)=(x-2):2$

$2(x+6)=-10(x-2)$　　よって　$x=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

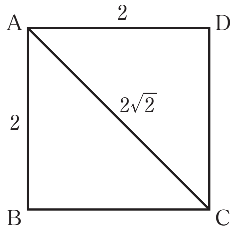
$x=\dfrac{2}{3}$ のとき　$\vec{a}+3\vec{b}=\left(\dfrac{20}{3},\ -10\right)$，$\vec{a}-\vec{b}=\left(-\dfrac{4}{3},\ 2\right)$　よって

$\vec{a}+3\vec{b}=-5(\vec{a}-\vec{b})$　より　$|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|=\mathbf{5}:\mathbf{1}$

第40講　平面ベクトル(2)

1　(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ が $\theta=60^\circ$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．
(2)　1辺の長さが2である正方形ABCDにおいて，次の内積を求めよ．
(i)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(ii)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　(iii)　$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}$　(iv)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}$

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times3\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}$



(2)　(i)　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は　45°

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 45^\circ=2\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{4}$

(ii)　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は　90°
よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 90^\circ=\mathbf{0}$

(iii)　$\overrightarrow{CB}$ と $\overrightarrow{DA}$ のなす角は　0°
よって　$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{DA}|\cos 0^\circ=2\times2\times1=\mathbf{4}$

(iv)　$\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{DC}$ のなす角は　135°

よって　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DC}|\cos 135^\circ=2\sqrt{2}\times2\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-4}$

2　[1]　p を正の数とし，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(1,\ -p)$ があるとする．いま，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，p の値を求めよ．

$|\vec{a}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$　　$|\vec{b}|=\sqrt{1+p^2}$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+1\times(-p)=1-p$

これらと　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$　より　$1-p=\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}\times\dfrac{1}{2}$

(右辺)>0 より　(左辺)>0　よって　$1-p>0$ より　$p<1$　　したがって　$0<p<1$

このとき両辺を2乗して　$(1-p)^2=2(1+p^2)\times\dfrac{1}{4}$　　$p^2-4p+1=0$　　$p=2\pm\sqrt{3}$

$0<p<1$ より　$p=\mathbf{2-\sqrt{3}}$

2　[2]　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ．

求めるベクトルを　$\vec{n}=(x,\ y)$ とおく．
$\vec{a}\perp\vec{n}$　より　$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$　つまり　$x-2y=0$　……①
また，$|\vec{n}|=1$ より　$x^2+y^2=1^2$　……②

①より　$x=2y$　これを②に代入して　$4y^2+y^2=1$　　$y^2=\dfrac{1}{5}$　よって　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

したがって求めるベクトルは $\vec{n}=\left(\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\right)$，$\left(-\dfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}},\ -\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\right)$

3　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ．

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるように実数 t の値を定め，その最小値を求めよ．

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$　より　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$　　よって　$9+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=13$　より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{3\times1}=\dfrac{1}{2}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\theta=\boldsymbol{60°}$

(2)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9-3+1=7$　よって　$|\vec{a}-\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

(3)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=t^2+3t+9=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}$

よって $t=-\dfrac{3}{2}$ のとき　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる．

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$　より　このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる．

したがって　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=\boldsymbol{-\frac{3}{2}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ をとる．

第 41 講　平面ベクトル(3)

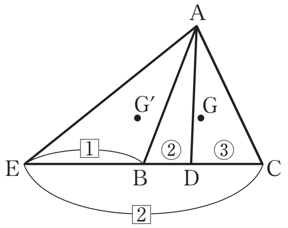
1　3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，辺 BC を 2：3 に内分する点を D，辺 BC を 1：2 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△AED の重心を G′ とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 G，点 G′ の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ であることを証明せよ．

D($\vec{d}$)，E($\vec{e}$)，G($\vec{g}$)，G′($\vec{g'}$) とする．



(1)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

$\vec{g'}=\dfrac{\vec{a}+\vec{e}+\vec{d}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\dfrac{2\vec{b}-\vec{c}}{-1+2}+\dfrac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\dfrac{13}{5}\vec{b}-\dfrac{3}{5}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{GG'}=\vec{g'}-\vec{g}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{8}{15}\vec{b}-\dfrac{8}{15}\vec{c}}$

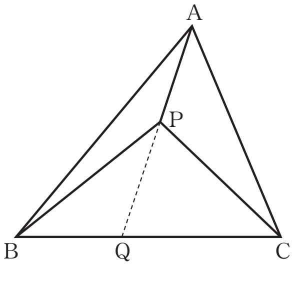
(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\vec{a}-\vec{g})+(\vec{b}-\vec{g})+(\vec{c}-\vec{g})=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{g}$

$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$　　よって　示された．

2　△ABC と点 P に関して，等式 $6\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1)　点 P の位置を答えよ．

(2)　面積比 △PBC：△PCA：△PAB を求めよ．



(1)　$6\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$　より

$6\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$11\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{11}=\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$

$\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}=\overrightarrow{AQ}$　とおくと　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{11}\overrightarrow{AQ}$

したがって　辺 BC を 2：3 に内分する点を Q とすると，

点 P は**線分 AQ を 5：6 に内分する点**である．

(2)　△ABC＝S とすると

△PBC＝$\dfrac{6}{11}$△ABC＝$\dfrac{6}{11}S$　　よって　△PCA＋△PAB＝$\dfrac{5}{11}S$

さらに　△PCA：△PAB＝3：2　より

△PAB＝$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{11}S=\dfrac{2}{11}S$　　△PCA＝$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{11}S=\dfrac{3}{11}S$

したがって　$\triangle \mathrm{PBC} : \triangle \mathrm{PCA} : \triangle \mathrm{PAB} = \frac{6}{11}S : \frac{3}{11}S : \frac{2}{11}S = \mathbf{6 : 3 : 2}$

> **3**　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 1：2 に内分する点を E，対角線 BD を 3：2 に内分する点を F とする．このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$　とする．

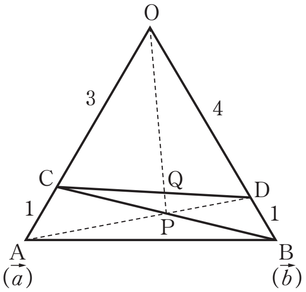
BF：FD＝3：2 より $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3+2} = \dfrac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{5} = \dfrac{1}{5}(2\vec{b} + 3\vec{d})$

CE：ED＝1：2 より $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{1+2} = \dfrac{2(\vec{b} + \vec{d}) + \vec{d}}{3} = \dfrac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{3} = \dfrac{1}{3}(2\vec{b} + 3\vec{d})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$　より，3 点 A，F，E は一直線上にある．

第42講　平面ベクトル(4)

1 [1]　△OABの2辺OA，OBをそれぞれ3：1，4：1に内分する点をそれぞれC，Dとし，BCとADの交点をP，CDとOPの交点をQとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とおくとき，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ．



PがAD上にあるので

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b} \quad \cdots\cdots①$$

PがCB上にあるので

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{a}+t\vec{b} \quad \cdots\cdots②$$

とおける．

$\vec{a}$，$\vec{b}$は1次独立より，①，②から

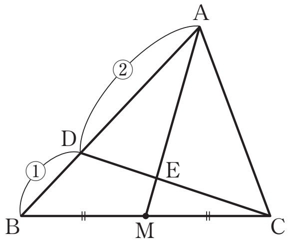
$1-s=\frac{3}{4}(1-t)$, $\frac{4}{5}s=t$　　よって　$s=\frac{5}{8}$，$t=\frac{1}{2}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$.

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$　(kは実数)　とおくと，$\vec{a}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OC}$，$\vec{b}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OD}$より

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{OD}$$

QはCD上の点より　$\frac{1}{2}k+\frac{5}{8}k=1$　　$k=\frac{8}{9}$　　したがって　$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}$.

1 [2]　△ABCの辺ABを2：1に内分する点をD，辺BCの中点をMとし，AMとCDの交点をEとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$　とするとき，$\overrightarrow{AE}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．



EはCD上にあるので

$$\overrightarrow{AE}=s\overrightarrow{AD}+(1-s)\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}s\vec{b}+(1-s)\vec{c} \quad \cdots\cdots①$$

EはAM上にあるので

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AM}=k\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{k}{2}\vec{b}+\frac{k}{2}\vec{c} \quad \cdots\cdots②$$

とおける．

$\vec{b}$，$\vec{c}$は1次独立より，①，②から

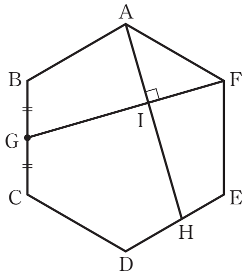
$\frac{2}{3}s=\frac{k}{2}$，$1-s=\frac{k}{2}$　　よって　$s=\frac{3}{5}$，$k=\frac{4}{5}$　　したがって　$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}}$

2　1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF において，辺 BC の中点を G とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする．

(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{FG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 点 H を辺 DE 上の点とする．$\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{FG}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) (2)のとき AH，FG の交点を I とする．$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．



(1) $\overrightarrow{AD}=\mathbf{2\vec{a}+2\vec{b}}$

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=\mathbf{\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$

DH：HE$=t:(1-t)$ とおくと

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=2\vec{a}+2\vec{b}-t\vec{a}=(2-t)\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{FG}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{FG}=0$

$\{(2-t)\vec{a}+2\vec{b}\}\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=0$　つまり　$\{(2-t)\vec{a}+2\vec{b}\}\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=0$

$(6-3t)|\vec{a}|^2+(t+4)\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

$6-3t+(t+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=0$　　$t=\frac{4}{7}$　　　$\overrightarrow{AH}=\mathbf{\frac{10}{7}\vec{a}+2\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AH}=k\left(\frac{10}{7}\vec{a}+2\vec{b}\right)=\frac{10}{7}k\vec{a}+2k\vec{b}$　……①　とおく．

また，GI：IF$=m:(1-m)$ とおくと

$\overrightarrow{AI}=(1-m)\overrightarrow{AG}+m\overrightarrow{AF}=(1-m)\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+m\vec{b}=\frac{3-3m}{2}\vec{a}+\frac{1+m}{2}\vec{b}$　……②

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は1次独立より，①，②から

$\frac{10}{7}k=\frac{3-3m}{2}$，$2k=\frac{1+m}{2}$　　$m=\frac{8}{13}$，$k=\frac{21}{52}$

したがって　$\overrightarrow{AI}=\mathbf{\frac{15}{26}\vec{a}+\frac{21}{26}\vec{b}}$

3 (1) △OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ のとき，△OAB の面積 S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) △OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，△OAB の面積 S を a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ．

(3) A(0, 0)，B(1, 2)，C(3, 4) を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ．

(1) $\angle AOB=\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とおくと，$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}}=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

よって　$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$

(2)　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2$　　$|\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2$　　$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(a_1b_1+a_2b_2)^2$

よって(1)より

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1{}^2b_2{}^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_1{}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}$$

(3)　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,\ 4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9+16}=5$　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times3+2\times4=11$

よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}^2\times5^2-11^2}=\boldsymbol{1}$

【別解】　$\triangle ABC=\frac{1}{2}|1\times4-2\times3|=1$

第 43 講　平面ベクトル(5)

1 (1) 点 A$(-2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-5y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) 法線ベクトルを利用し，2 直線 $3x+y+6=0$ と $x+2y-5=0$ のなす鋭角を求めよ．

(1) 直線 l：$3x-5y+4=0$ の法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると，$\vec{n}=(3,\ -5)$ である．

直線 l と平行な直線について

その法線ベクトルは $\vec{n}$ であり，A$(-2,\ 1)$ を通る

よってその方程式は　$3(x+2)-5(y-1)=0$　つまり　$\mathbf{3x-5y+11=0}$

直線 l と垂直な直線について

その方向ベクトルは　$\vec{n}$ である．法線ベクトルを $\vec{m}=(a,\ b)$ とおくと，

$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$ より　$3a-5b=0$　よって　$b=\dfrac{3}{5}a$

したがって　$\vec{m}=\left(a,\ \dfrac{3}{5}a\right)=\dfrac{a}{5}(5,\ 3)$　より，

求める直線の法線ベクトルの 1 つは $(5,\ 3)$ であり，A$(-2,\ 1)$ を通る

ゆえにその方程式は　$5(x+2)+3(y-1)=0$　つまり　$\mathbf{5x+3y+7=0}$

(2) 2 直線 $3x+y+6=0$，$x+2y-5=0$ の法線ベクトルは

それぞれ　$\vec{n}=(3,\ 1)$，$\vec{m}=(1,\ 2)$ とおける．

$\vec{n}$ と $\vec{m}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq 180°)$ とすると

$|\vec{n}|=\sqrt{10}$，$|\vec{m}|=\sqrt{5}$，$\vec{n}\cdot\vec{m}=3+2=5$　より

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　よって　$\theta=45°$

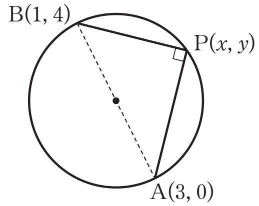
したがって，2 直線のなす角は　**45°**

2 (1) 2点A(3, 0), B(1, 4)を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ.

(2) △OABにおいて, $|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$とする. 点Aで直線OAに接する円の中心Cが∠AOBの二等分線g上にある. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおくとき, $\vec{c}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$で表せ.

(1) 求める円の円周上の点をP(x, y)とすると,

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$　すなわち　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$



$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y)$, $\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y-4)$より

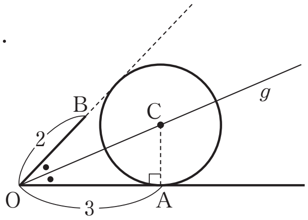
$(x-3)(x-1)+y(y-4)=0$　　$x^2-4x+y^2-4y+3=0$

したがって　$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2=5}$

(2) 点Cは∠AOBの二等分線上にあるので

$$\vec{c}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=k\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}\right)=\frac{k}{6}(2\vec{a}+3\vec{b})$$ （kは実数）とおける.

ここで　$\frac{k}{6}=t$とおくと, $\vec{c}=t(2\vec{a}+3\vec{b})$　（tは実数）とおける.



ここで, CA⊥OAであることより　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

つまり　$(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$\{\vec{a}-(2t\vec{a}+3t\vec{b})\}\cdot\vec{a}=0$　　$|\vec{a}|^2-2t|\vec{a}|^2-3t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

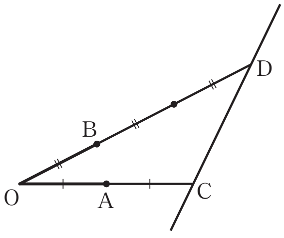
$9-18t-12t=0$　　$t=\frac{3}{10}$　　したがって　$\boldsymbol{\vec{c}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{9}{10}\vec{b}}$

3 △OABに対し, $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　とする. 実数s, tが次の条件を満たすとき, 点Pはそれぞれどのような図形を描くか. O, A, Bを適当にとって図示せよ.

(1) $\frac{s}{2}+\frac{t}{3}=1$　　(2) $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$, $1\leqq s+t\leqq 2$

(1) $\frac{s}{2}+\frac{t}{3}=1$　であり

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+\frac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$



よって, $2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$, $3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$とすると,

点Pは**直線CD上を動く**.

(2) $0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$のとき, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$とする.

点Pの存在範囲は平行四辺形OACBの周および内部に限られる.

$s+t=k$　とおくと, $1\leqq k\leqq 2$

また, $\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$, $\frac{s}{k}\geqq 0$, $\frac{t}{k}\geqq 0$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$　より

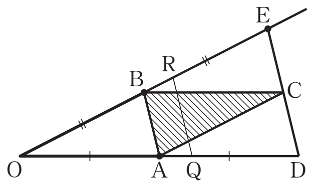
$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，k を固定すると

点 P は辺 AB と平行な線分 QR 上を動く．

$1 \leqq k \leqq 2$ の範囲で k を動かすことにより，

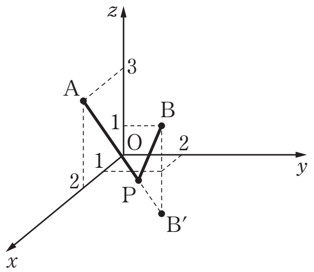
$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ とすると，点 P の存在範囲は

△ABC の周および内部である．



第 44 講　空間ベクトル(1)

1 ［1］ 定点 A(2, 0, 3), B(1, 2, 1) と, xy 平面上の点 P に対し, AP＋PB の最小値を求めよ.



xy 平面に関して点 B と対称な点を B′ とすると B′(1, 2, −1)

このとき　AP＋PB＝AP＋PB′≧AB′

したがって, もとめる最小値は

$$\mathrm{AB'}=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2+(-1-3)^2}=\boldsymbol{\sqrt{21}}$$

1 ［2］ 直方体 ABCD-EFGH において　AB＝4, AD＝2, AE＝1 とする. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とするとき, 次の問いに答えよ. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.　　(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を求めよ. (3) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ のなす角は 120° より大きいか小さいかを調べよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=|\vec{b}+\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2$

$=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2=4+1-16=\boldsymbol{-11}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$　　$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=\sqrt{21}$

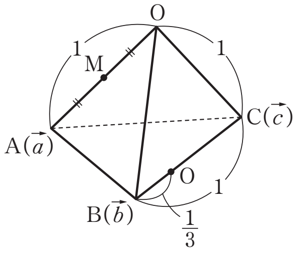
$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}|}=\frac{-11}{\sqrt{21}\sqrt{21}}=-\frac{11}{21}<-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$$

よって **120° より大きい**

2 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする. (1) 辺 OA の中点を M とする. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表し, 内積 $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ を求めよ. (2) 辺 BC 上に $\mathrm{BD}=\frac{1}{3}$ となるように点 D をとる. このとき, 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を求めよ.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$



(1) $\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boldsymbol{\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boldsymbol{\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2)　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\vec{a}\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

3 [1]　A$(-2,\ 1,\ 3)$，B$(-3,\ 1,\ 4)$，C$(-3,\ 3,\ 5)$とするとき，2つのベクトル$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$のなす角を求めよ．また，△ABCの面積Sを求めよ．

$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 2,\ 2)$より

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1+4+4}=3$　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1+0+2=3$

よって　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$のなす角θは

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$0\leqq\theta\leqq180^\circ$　より　$\theta=\mathbf{45^\circ}$

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

3 [2]　2つのベクトル$\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

求める単位ベクトルを$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$とする．

$|\vec{n}|=1$　より　$x^2+y^2+z^2=1^2$　……①

$\vec{a}\perp\vec{n}$　より　$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$　　よって　$x-2y+2z=0$　……②

$\vec{b}\perp\vec{n}$　より　$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$　　よって　$2x+3y-10z=0$　……③

②，③より　$x=2z$，$y=2z$

これらを①に代入して　$9z^2=1$　　$z^2=\frac{1}{9}$　　$z=\pm\frac{1}{3}$

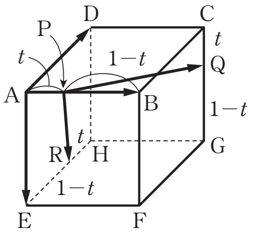
よって求める単位ベクトルは$\vec{n}=\left(\pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{3}\right)=\pm\mathbf{\frac{1}{3}(2,\ 2,\ 1)}$

第45講　空間ベクトル(2)

1　1辺の長さが1の立方体ABCD-EFGHにおいて，辺AB，CG，HEを $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれP，Q，Rとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．ただし，$0<t<1$ とする．

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角 θ を求めよ．



(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\{(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AG}\}-t\overrightarrow{AB}$

$=(1-t)(\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-t\vec{a}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\{\overrightarrow{AE}+(1-t)\overrightarrow{EH}\}-t\overrightarrow{AB}$

$=\vec{c}+(1-t)\vec{b}-t\vec{a}=\boldsymbol{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}}$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|^2=(1-t)^2+1+t^2=2t^2-2t+2$

$|\overrightarrow{PR}|^2=|-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}|^2=t^2+(1-t)^2+1=2t^2-2t+2$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}\}$

$=(1-t)\times(-t)+1\times(1-t)+t\times1=t^2-t+1$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{t^2-t+1}{\sqrt{2t^2-2t+2}\sqrt{2t^2-2t+2}}=\dfrac{t^2-t+1}{2(t^2-t+1)}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$　より　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

2　[1]　3点A$(-1,\ -1,\ -1)$，B$(1,\ 2,\ 3)$，C$(x,\ y,\ 1)$ が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ．

3点A，B，Cが一直線上にあるとき

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$　となる実数 k が存在する．

$\overrightarrow{AC}=(x+1,\ y+1,\ 2)$，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3,\ 4)$　より

$(x+1,\ y+1,\ 2)=k(2,\ 3,\ 4)=(2k,\ 3k,\ 4k)$

よって，$x+1=2k$　……①　　$y+1=3k$　……②　　$2=4k$　……③

③より　$k=\dfrac{1}{2}$　　よって①，②より　$\boldsymbol{x=0}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}}$

2　[2]　正四面体ABCDにおいて，△BCDの重心をGとする．ある実数 k について，$k\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ を満たす点Pは，2点A，Gを通る直線上にあることを証明せよ．

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$　……①

また，$k\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$　より

$-k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$

$(3-k)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　……②

$k=3$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$　つまり　①から $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{0}$　より　不適.

よって　$k\neq3$　このとき　②より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3-k}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$　……③

①，③より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{3-k}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$　より　3 点 A，G，P は一直線上にある.

したがって，点 P は 2 点 A，G を通る直線上にある.

3　直方体 ABCD-EFGH において，辺 BF を 2：1 に内分する点を P，辺 FG を $t:(1-t)$ に内分する点を Q，辺 DH の中点を R とする．4 点 A，P，Q，R が同一平面上にあるとき，実数 t の値を求めよ.

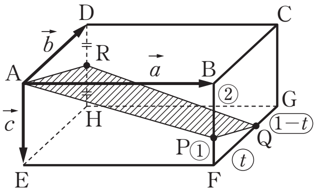
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とする.

点 Q が平面 APR 上にあるとき，実数 α，β を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

$=\alpha\left(\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\left(\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{1}{2}\beta\right)\vec{c}$　……①　と表される.



また，点 Q は辺 FG 上より

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+t\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\vec{a}+\vec{c}+t\vec{b}$　……②　と表される.

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立より　①，②から　$\alpha=1$，$\beta=t$，$\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$

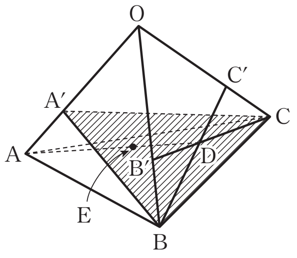
したがって　$\alpha=1$，$\beta=\dfrac{2}{3}$　　ゆえに　$t=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

第46講　空間ベクトル(3)

1　四面体OABCを考え，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．また，線分OA，OB，OCを2：1に内分する点をそれぞれA′，B′，C′とし，直線BC′と直線B′Cとの交点をD，3点A′，B，Cを通る平面と直線ADとの交点をEとする．

(1)　$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．



(1)　DがBC′上の点であることより

$$\overrightarrow{OD}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC'}=(1-t)\vec{b}+\frac{2}{3}t\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

DがB′C上の点であることより

$$\overrightarrow{OD}=(1-s)\overrightarrow{OB'}+s\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立より，①，②から

$$1-t=\frac{2}{3}(1-s),\ \frac{2}{3}t=s\qquad よって\quad s=\frac{2}{5},\ t=\frac{3}{5}$$

よって　$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}}$

(2)　EはAD上の点より

$$\overrightarrow{OE}=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OD}$$

$$=(1-u)\vec{a}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}=\frac{3}{2}(1-u)\overrightarrow{OA'}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}$$

Eは平面A′BC上より　$\frac{3}{2}(1-u)+\frac{2}{5}u+\frac{2}{5}u=1\qquad u=\frac{5}{7}$

したがって　$\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}}$

2　原点Oおよび3点A(1，0，0)，B(2，1，0)，C(0，0，2)がある．点Oから3点ABCを通る平面に下ろした垂線の足をHとする．次の問いに答えよ．

(1)　Hの座標を求めよ．

(2)　四面体OABCの体積を求めよ．

(1)　Hは平面ABC上より，実数s，tを用いて

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

$$=(1,\ 0,\ 0)+s(1,\ 1,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 2)$$

$$=(s-t+1,\ s,\ 2t)$$

と表せる．

OH⊥平面ABCより　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　より　$1\times(s-t+1)+1\times s+0\times 2t=0$

よって　$2s-t=-1\quad\cdots\cdots①$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　より　$-1\times(s-t+1)+s\times 0+2\times 2t=0$

よって　$-s+5t=1$　……②

①，②より　$s=-\dfrac{4}{9}$，$t=\dfrac{1}{9}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(-\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}+1,\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)=\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$　より　$\mathrm{H}\boldsymbol{\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}(2,\ -2,\ 1)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{2}{9}\sqrt{4+4+1}=\dfrac{2}{3}$

また，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}^2\times\sqrt{5}^2-(-1)^2}=\dfrac{3}{2}$

よって求める体積は　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

> **3**　点 (1，2，0) を通り，$\vec{u}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を l，2 点 (4，2，0)，(5，3，0) を通る直線を m とする．また，点 (2，2，1) を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面を S とする．
> (1)　直線 l と yz 平面の交点の座標を求めよ．
> (2)　直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q の最短距離を求めよ．
> (3)　球面 S の方程式を求めよ．また，球面 S と直線 l が共有点をもつか調べよ．

(1)　直線 l の方程式は

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 0)+t(1,\ 1,\ -1)$ より

$x=1+t$，$y=2+t$，$z=-t$　(t は実数)　と表せる．

これと yz 平面　つまり　$x=0$ との交点は　$1+t=0$ より　$t=-1$

よってその座標は　$\boldsymbol{(0,\ 1,\ 1)}$

(2)　直線 m の方程式は，その方向ベクトルが (1，1，0) であることより

$(x,\ y,\ z)=(4,\ 2,\ 0)+s(1,\ 1,\ 0)$

つまり　$x=4+s$，$y=2+s$，$z=0$　(s は実数)　と表せる．

よって　$\mathrm{P}(1+t,\ 2+t,\ -t)$，$\mathrm{Q}(4+s,\ 2+s,\ 0)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(s-t+3)^2+(s-t)^2+t^2\\&=2s^2-2(2t-3)s+3t^2-6t+9\\&=2\left(s-t+\frac{3}{2}\right)^2+t^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

したがって PQ^2 は　$s-t=-\dfrac{3}{2}$ かつ $t=0$　つまり $t=0$，$s=-\dfrac{3}{2}$ のとき　最小値 $\dfrac{9}{2}$ をとる

$\mathrm{PQ}>0$　より　このとき PQ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$ をとる．

(3)　中心 (2，2，1)，半径 $\sqrt{3}$ の球面 S の方程式は

$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3}$

これに $x=1+t$，$y=2+t$，$z=-t$　を代入すると

$$(t-1)^2+t^2+(-t-1)^2=3 \qquad t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって実数 t が存在するので，球面 S と直線 l は**共有点をもつ**.

その座標は　$\left(\mathbf{1\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ 2\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$　**(複号同順)**

第 47 講　整数の性質(1)

1　次の(A), (B), (C)を満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．ただし，$a<b<c$ とする．

(A)　$a,\ b,\ c$ の最大公約数は 6

(B)　b と c の最大公約数は 24，最小公倍数は 144

(C)　a と b の最小公倍数は 240

(B)より，b と c の最大公約数は 24 であるから

$b=24b',\ c=24c'$　（$b',\ c'$ は互いに素な自然数，$b'<c'$）とおける．

(B)より，$24b'c'=144$　よって　$b'c'=6$

$b'<c'$ より　$(b',\ c')=(1,\ 6),\ (2,\ 3)$ のみ

よって　$(b,\ c)=(24,\ 144),\ (48,\ 72)$

(C)より，a と b の最小公倍数は　$240=2^4\cdot3\cdot5$

$b=24=2^3\cdot3$ のとき，$a=2^4\cdot3\cdot5$　であるが，

これは $a<b$ を満たさず不適．

$b=48=2^4\cdot3$ のとき，$a=2^p\cdot3\cdot5$（$p=1,\ 2,\ 3,\ 4$）

このうち，$a<b$ を満たすのは $p=1$ のときのみ．このとき $a=30$

したがって　$(a,\ b,\ c)=\mathbf{(30,\ 48,\ 72)}$　これは(A)を満たす．

2　n は整数とする．次のことを証明せよ．

(1)　n^2+7n+4 は偶数である．

(2)　n^2+1 は 3 の倍数でない．

(3)　n^2 を 6 で割ったときの余りは 2，5 にならない．

以下，k を整数とする．

(1)　$n=2k$ のとき

$$n^2+7n+4=(2k)^2+7\cdot2k+4=2(2k^2+7k+2)$$

$n=2k+1$ のとき

$$n^2+7n+4=(2k+1)^2+7(2k+1)+4=2(2k^2+9k+6)$$

よっていずれの場合も n^2+7n+4 は偶数である．

(2)　$n=3k$ のとき

$$n^2+1=(3k)^2+1=3\cdot3k^2+1$$

$n=3k+1$ のとき

$$n^2+1=(3k+1)^2+1=3(3k^2+2k)+2$$

$n=3k+2$ のとき

$$n^2+1=(3k+2)^2+1=3(3k^2+4k+1)+2$$

よっていずれの場合も　n^2+1 は 3 の倍数ではない．

(3)　$n=6k$ のとき

$n^2=(6k)^2=6\cdot6k^2$

$n=6k\pm1$ のとき

$n^2=(6k\pm1)^2=6(6k^2\pm2k)+1$　（複号同順）

$n=6k\pm2$ のとき

$n^2=(6k\pm2)^2=6(6k^2\pm4k)+4$　（複号同順）

$n=6k+3$ のとき

$n^2=(6k+3)^2=6(6k^2+6k+1)+3$

よって n^2 を 6 で割ったときの余りは 0，1，3，4 のいずれか，つまり 2，5 にならない．

> **3**　a，b，c を整数とし，$a^2+b^2=c^2$　とする．次の問いに答えよ．
> (1)　a，b のうち，少なくとも 1 つは 3 の倍数であることを示せ．
> (2)　a，b，c が互いに素であるとき，c は奇数であることを示せ．

(1)　k を整数とする．

$n=3k$ のとき　$n^2=(3k)^2=3\cdot3k^2$

$n=3k\pm1$ のとき　$n^2=(3k\pm1)^2=3(3k^2\pm2k)+1$

よって　n が 3 の倍数のとき，n^2 を 3 で割った余りは 0，

n が 3 の倍数でないとき，n^2 を 3 で割った余りは 1 である．

したがって，整数 c^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である．

ここで，a，b がともに 3 の倍数でないとすると，

a^2，b^2 を 3 で割った余りは 1 より，a^2+b^2 を 3 で割った余りは 2

よって，$a^2+b^2=c^2$ であることに反する．

ゆえに　a，b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数である．

(2)　a，b は互いに素より a，b がともに偶数であることはない．

ここで　$n=2k$ のとき　$n^2=4k^2$

$n=2k+1$ のとき　$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

よって n^2 を 4 で割った余りは 0 か 1 であり，a^2，b^2，c^2 に対しても同様である．

a，b がともに奇数のとき，a^2，b^2 を 4 で割った余りは 1 より

a^2+b^2 を 4 で割った余りは 2 となり，$a^2+b^2=c^2$ であることに反する．

よって　a，b は偶奇を異にする．

対称性より a を偶数，b を奇数としても一般性を失わない．このとき a^2+b^2 は奇数より c^2 は奇数である．したがって，整数 c は奇数である．

第 48 講　整数の性質(2)

1　次の等式を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ．

(1)　$4x-7y=1$

(2)　$24x+19y=1$

(1)　$4x-7y=1$　……①　の整数解の 1 つは　$x=2$，$y=1$

よって　$4\cdot 2-7\cdot 1=1$　……②

①−②より　$4(x-2)-7(y-1)=0$　つまり　$4(x-2)=7(y-1)$

4，7 は互いに素より，$x-2$ は 7 の倍数

よって　$x-2=7k$（k は整数）と表せる．

このとき　③より　$4\cdot 7k=7(y-1)$　つまり　$y-1=4k$

したがって①の解は　$\boldsymbol{x=7k+2}$，$\boldsymbol{y=4k+1}$　**（$\boldsymbol{k}$ は整数）**

(2)　$24=19\cdot 1+5$　より　$5=24-19\cdot 1$

$19=5\cdot 3+4$　より　$4=19-5\cdot 3$

$5=4\cdot 1+1$　より　$1=5-4\cdot 1$

よって　$1=5-4\cdot 1$

$=5-(19-5\cdot 3)\cdot 1$

$=5\cdot 4+19\cdot(-1)$

$=(24-19\cdot 1)\cdot 4+19\cdot(-1)$

$=24\cdot 4+19\cdot(-5)$

したがって　$24x+19y=1$　……①の整数解の 1 つは　$x=4$，$y=-5$　である．

このことより①は　$24(x-4)+19(y+5)=0$

つまり　$24(x-4)=-19(y+5)$　……②

24，19 は互いに素より　$x-4$ は 19 の倍数

よって　$x-4=19k$　（k は整数）

このとき　②より　$24\cdot 19k=-19(y+5)$　つまり　$y+5=-24k$

したがって①の解は　$\boldsymbol{x=19k+4}$，$\boldsymbol{y=-24k-5}$　**（$\boldsymbol{k}$ は整数）**

2 ［1］　$4x+2y+z=15$　を満たす自然数 x，y，z の組を求めよ．

$4x+2y+z=15$　より　$2y+z=15-4x$

$y\geqq 1$，$z\geqq 1$ より　$2y+z\geqq 3$　　つまり　$15-4x\geqq 3$　　よって　$x\leqq 3$

よって $x=1$，2，3 に限られる．

$x=1$ のとき　$2y+z=11$

$z\geqq 1$ より $11-2y\geqq 1$　　$y\leqq 5$　　よって　$y=1$，2，3，4，5

このときそれぞれ　$z=9$，7，5，3，1

$x=2$ のとき　$2y+z=7$

$z=7-2y\geqq 1$　より　$y\leqq 3$　　よって　$y=1,\ 2,\ 3$

このときそれぞれ　$z=5,\ 3,\ 1$

$x=3$ のとき　$2y+z=3$

$z=3-2y\geqq 1$　　より　$y=1$　このとき　$z=1$

以上より　$(x,\ y,\ z)=$**(1, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 5), (1, 4, 3), (1, 5, 1)**

(2, 1, 5), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 1)

---

2 [2]　(1)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$ を因数分解せよ.

(2)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

---

(1)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-4$

$=6x^2+(y-5)x-2(y-1)(y-2)$

$=\boldsymbol{(3x+2y-4)(2x-y+1)}$

(2)　$6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$　より

$(3x+2y-4)(2x-y+1)=16$

$x,\ y$ は自然数より，$3x+2y-4\geqq 1$.　よって　$2x-y+1\geqq 1$

したがって　$(3x+2y-4,\ 2x-y+1)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2),\ (16,\ 1)$

このうち，$x,\ y$ が自然数となるのは

$(3x+2y-4,\ 2x-y+1)=(4,\ 4),\ (8,\ 2)$ のときで，

$(x,\ y)=$**(2, 1), (2, 3)**

3　(1)　2 進法で表すと 10 桁になるような自然数 N は何個あるか求めよ.

(2)　自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 abc となり，7 進法で表すと 3 桁の数 cab となる．$a,\ b,\ c$ を求めよ．また，N を 10 進法で表せ.

---

(1)　題意より

$2^9\leqq N<2^{10}$

これを満たす自然数 N の個数は　$(2^{10}-1)-2^9+1=2^9(2-1)=2^9=$**512（個）**

(2)　abc は 3 桁の 5 進数より　$1\leqq a\leqq 4,\ 0\leqq b\leqq 4,\ 0\leqq c\leqq 4$

cab は 3 桁の 7 進数より　$1\leqq c\leqq 6,\ 0\leqq b\leqq 6,\ 0\leqq a\leqq 6$

よって　$1\leqq a\leqq 4,\ 0\leqq b\leqq 4,\ 1\leqq c\leqq 4$

$N=abc_{(5)}=a\cdot 5^2+b\cdot 5^1+c\cdot 5^0=25a+5b+c$

$N=cab_{(7)}=c\cdot 7^2+a\cdot 7^1+b\cdot 7^0=49c+7a+b$

よって　$25a+5b+c=49c+7a+b$　つまり　$9a+2b=24c$　……①

ここで，①より　$24c=9a+2b\leqq 9\cdot 4+2\cdot 4=44$　より　$c\leqq \dfrac{11}{6}$　よって　$c=1$

このとき　①より　$9a+2b=24$　すなわち　$2b=3(8-3a)$　……②

2と3は互いに素より，bは3の倍数である．よって　$b=0$，3

$b=0$のとき　②を満たす整数aはない

$b=3$のとき　②より　$a=2$　これは適する．

以上より　$a=\mathbf{2}$，$b=\mathbf{3}$，$c=\mathbf{1}$

したがって　$N=25\cdot2+5\cdot3+1=\mathbf{66}$

練習問題解答

第 25 講　指数関数・対数関数(1)

(1)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-54\geqq 0$ の解は　$x\leqq$ [アイ] である.

(2)　$2^x+2^{-x}\geqq\frac{5}{2}$ の解は　$x\leqq$ [ウエ]，[オ] $\leqq x$ である.

(3)　$0\leqq x\leqq 3$ の範囲において，$y=4^x-2^{x+3}+12$ の最大値は [カキ]　最小値は [クケ] である.

(1)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-54\geqq 0$　より　$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-54\geqq 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$　とおくと　$t^2-3t-54\geqq 0$　　$(t-9)(t+6)\geqq 0$

$t>0$ より　$9\leqq t$　つまり　$9\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^x$　　$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^x$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいので　$x\leqq \mathbf{-2}$

(2)　$2^x+2^{-x}\geqq\frac{5}{2}$　より　$2^x+\frac{1}{2^x}\geqq\frac{5}{2}$

$2^x=t$ とおくと　$t+\frac{1}{t}\geqq\frac{5}{2}$　　$t>0$ より　$t^2+1\geqq\frac{5}{2}t$

$2t^2-5t+2\geqq 0$　　$(2t-1)(t-2)\geqq 0$　　$t\leqq\frac{1}{2}$，$2\leqq t$

つまり　$2^x\leqq\frac{1}{2}$，$2\leqq 2^x$　　底 2 は 1 より大きいので　$x\leqq\mathbf{-1}$，$\mathbf{1}\leqq x$

(3)　$y=4^x-2^{x+3}+12=(2^x)^2-8\cdot 2^x+12$

$2^x=t$ とおくと　$0\leqq x\leqq 3$　より　$1\leqq t\leqq 8$

このとき　$y=t^2-8t+12=(t-4)^2-4$

よって　$t=8$　つまり　$x=3$ のとき　最大値　**12**

$t=4$　つまり　$x=2$ のとき　最小値　**−4**

第 26 講　指数関数・対数関数(2)

(1)　$2^{2\log_4 3}=$ ア である.

(2)　$(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^2-3=0$ の解は　$x=$ イウエオ , $\dfrac{\text{カ}}{\text{キク}}$ である.

(3)　$\log_3(2x-1)+\log_3(x+2)\leqq 1$　の解は　$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}<x\leqq$ サ である.

(4)　関数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-2x-x^2)$ の最小値は シス である.

(1)　$2^{2\log_4 3}=2^{2\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}}=2^{\log_2 3}=\mathbf{3}$

(2)　$(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^2-3=0$　より　$(\log_{10}x)^2-2\log_{10}x-3=0$

$\log_{10}x=t$ とおくと　$t^2-2t-3=0$　　$(t-3)(t+1)=0$　　$t=3,\ -1$

つまり　$\log_{10}x=3,\ -1$　　したがって　$x=10^3,\ 10^{-1}$　より　$x=\mathbf{1000},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$

(3)　真数は正より $x>\dfrac{1}{2}$　かつ　$x>-2$　　よって　$x>\dfrac{1}{2}$

このとき　$\log_3(2x-1)+\log_3(x+2)\leqq 1$　より　$\log_3(2x-1)(x+2)\leqq\log_3 3$

底 3 は 1 より大きいので　$(2x-1)(x+2)\leqq 3$　　$2x^2+3x-5\leqq 0$

$(2x+5)(x-1)\leqq 0$　　　$-\dfrac{5}{2}\leqq x\leqq 1$

$x>\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}<x\leqq\mathbf{1}$

(4)　$3-2x-x^2=X$　とおくと　$X=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$　　よって　$X\leqq 4$

このとき　$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}X$　の底 $\dfrac{1}{2}$ が 1 より小さいことからグラフは単調減少.

したがって　$X=4$　つまり　$x=-1$ のとき　最小値　$\log_{\frac{1}{2}}4=\mathbf{-2}$　をとる.

第 27 講　指数関数・対数関数(3)

［1］ $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とするとき，3^{37} は [アイ] 桁の数である．また，3^{37} の最高位の数字は [ウ] であり，1 の位の数字は [エ] である．

［2］ 関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値を求めたい．$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，t のとりうる値の範囲は $t\geqq$ [オ] である．また，$f(x)$ を t を用いて表すと $f(x)=t^2-$ [カ] $t+$ [キク] である．よって $f(x)$ の最小値は [ケコ] である．

［1］ $\log_{10}3^{37}=37\log_{10}3=37\times0.4771=17.6527$

よって　$3^{37}=10^{17.6527}=10^{0.6527}\times10^{17}$　より　3^{37} は **18** 桁の数である．

また，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$　　つまり　$10^{0.6020}=4$　であり

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-\log_{10}2=0.6990 \quad \text{である．}$$

よって　$4<10^{0.6527}<5$　より　$10^{0.6527}$ の整数部分は 4

したがって　3^{37} の最高位の数字は **4** である．

さらに，3^n の 1 の位は　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$ のとき 3，9，7，1，3，…… と 3，9，7，1 を繰り返す．したがって $3^{37}=3^{4\times9+1}$　の 1 の位は **3** である．

［2］ $2^x>0$ より　相加平均と相乗平均の関係から

$$t=2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=2$$
等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=0$ のとき．

よって　t のとりうる値の範囲は　$t\geqq\mathbf{2}$　である．

$$\begin{aligned}f(x)&=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16\\&=(2^x)^2+(2^{-x})^2-8\cdot2^x-8\cdot2^{-x}+16\\&=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}-8(2^x+2^{-x})+16\\&=t^2-\mathbf{8}t+\mathbf{14}\end{aligned}$$

よって　$t\geqq2$ において　$f(x)=(t-4)^2-2$ は　$t=4$ のとき最小値 **−2** をとる．

第28講　微分法・積分法(1)

2つの放物線 C_1：$y=x^2-5x+7$，C_2：$y=x^2+3x-1$ について，次の問いに答えよ．

(1)　C_1 上の点 (1，3) における接線は　$y=-$［ア］$x+$［イ］である．

(2)　C_1 の $x=s$ における接線は　$y=($［ウ］$s-$［エ］$)x-s^2+$［オ］であり，C_2 の $x=t$ における接線は

$y=($［カ］$t+$［キ］$)x-t^2-$［ク］　である．よって C_1 と C_2 の両方に接する直線は　$y=x-$［ケ］である．

C_1：$y=x^2-5x+7$　より　$y'=2x-5$

C_2：$y=x^2+3x-1$　より　$y'=2x+3$

(1)　C_1 上の点 (1，3) における接線の方程式は

$y=-3(x-1)+3$　より　$y=-\mathbf{3}x+\mathbf{6}$

(2)　C_1 の $x=s$ における接線は

$y=(2s-5)(x-s)+s^2-5s+7$　より　$y=(\mathbf{2}s-\mathbf{5})x-s^2+\mathbf{7}$　……①

C_2 の $x=t$ における接線は

$y=(2t+3)(x-t)+t^2+3t-1$　より　$y=(\mathbf{2}t+\mathbf{3})x-t^2-\mathbf{1}$　……②

①，②より

$2s-5=2t+3$　……③

$-s^2+7=-t^2-1$　……④

③より　$s=t+4$

これを④に代入して　$-(t+4)^2+7=-t^2-1$

$-8t=8$　　$t=-1$　　このとき　$s=3$

よって　C_1 と C_2 の両方に接する直線は　$y=x-\mathbf{2}$　である．

第 29 講　微分法・積分法(2)

$a<0$ のとき　$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ の極値を求めたい．

$f'(x)=6(x-a)(x-$ ア $)$ より，$x=a$，ア のとき $f'(x)=0$ である．

$a<0<$ ア であることより，$f(x)$ は極大値　$-a^3+$ イ a^2，極小値

ウ $a-$ エ をとる．

次に，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を求めたい．区間 $-2\leqq x\leqq 2$ に $x=$ ア

は含まれる．また，$f(x)=f($ ア $)$　より

$(x-$ ア $)^2\{2x-($ オ $a-$ カ $)\}=0$　であるから，この方程式の解は

$x=$ ア ，$\dfrac{\text{オ}\,a-\text{カ}}{2}$ である．したがって

$\dfrac{\text{オ}\,a-\text{カ}}{2}<-2$　つまり　$a<-$ キ のとき

$f(x)$ の最小値は　ウ $a-$ エ ，

$-$ キ $\leqq a<0$ のとき　$f(x)$ の最小値は　$-$ クケ $a-$ コサ 　である．

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$　より

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-a)(x-\mathbf{1})$　より　$x=a$，1 のとき $f'(x)=0$ である．

$a<0<1$　より　$f(x)$ は

極大値　$f(a)=-a^3+\mathbf{3}a^2$　　　極小値　$f(1)=\mathbf{3}a-\mathbf{1}$

をとる．

$-2\leqq x\leqq 2$ に $x=1$ は含まれる．よって極小値 $f(1)$ は $f(x)$ の最小値の候補である．

この $f(1)$ と変域の左端の値 $f(-2)$ のうち大きくない方が，求める $f(x)$ の最小値である．

$f(x)=f(1)$ より　$2x^3-3(a+1)x^2+6ax=3a-1$

$2x^3-3(a+1)x^2+6ax-3a+1=0$

$(x-1)^2\{2x-(\mathbf{3}a-\mathbf{1})\}=0$　　　$x=1,\ \dfrac{3a-1}{2}$

よって　$\dfrac{3a-1}{2}<-2$ つまり $a<-1$ のとき　区間 $-2\leqq x\leqq 2$ に $x=\dfrac{3a-1}{2}$ は含まれない．

つまり　$a<-\mathbf{1}$ のとき　$f(x)$ の最小値は　$f(1)=3a-1$　である．

また，$-1\leqq a<0$ のとき　$f(x)$ の最小値は　$f(-2)=-\mathbf{24}a-\mathbf{28}$　である．

第 30 講　微分法・積分法(3)

［1］ 3 次方程式 $2x^3+3ax^2+a+2=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ a の値の範囲は

$-$ ア $<a<-$ イ である.

［2］ $x \geqq -2$ のとき $-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+b<0$ がつねに成立するような b の値の範囲

は $b<-\dfrac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ である.

［1］ $f(x)=2x^3+3ax^2+a+2$ とおき，$y=f(x)$ が x 軸と異なる 3 交点をもつときを考える.

$f'(x)=6x^2+6ax=6x(x+a)$

$a=0$ のとき　$f'(x)=6x^2 \geqq 0$　より $f(x)$ は単調増加.

よって $y=f(x)$ と x 軸との交点はただ 1 つとなり不適.

$a \neq 0$ のとき　$x=0,\ -a$ で $f'(x)=0$ となり，$f(x)$ は 2 極値

$f(0)=a+2$　　$f(-a)=a^3+a+2=(a+1)(a^2-a+2)$　をもつ.

3 つの実数解をもつには $f(0)\times f(-a)<0$　　$(a+2)(a+1)(a^2-a+2)<0$

$a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$　より　$(a+2)(a+1)<0$　　よって　$-2<a<-1$

以上より求める a の範囲は　$\mathbf{-2<a<-1}$　である.

［2］ $-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+b<0$　より　$b<\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$

よって $y=b$ のグラフが $x \geqq -2$ においてつねに $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$ より下であればよい.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$　とおくと

$f'(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\frac{2}{3}$	↗	$\frac{7}{6}$	↘	$-\frac{10}{3}$	↗

$f(x) \geqq -\frac{10}{3}$　より　$b<f(x)$ が $x \geqq -2$ において常に成立するときの b の範囲は

$b<-\mathbf{\frac{10}{3}}$ である.

第 31 講　微分法・積分法(4)

[1]　定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx-\int_{2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx$ の値は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ である.

[2]　(1)　等式 $f(x)=3x^2+2-\displaystyle\int_0^2 xf(t)dt$　を満たす関数 $f(x)$ は

$f(x)=\boxed{エ}x^2-\boxed{オ}x+\boxed{カ}$ である.

(2)　等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+2x-3$ を満たす関数 $f(x)$ は $f(x)=\boxed{キ}x+\boxed{ク}$

であり，定数 a の値は $a=-\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$ である.

[1]　$\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx-\int_{2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{\sqrt{2}}(x^3+x^2+x+1)dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^3+x^2+x+1)dx$

$\displaystyle=\int_{-2}^{2}(x^3+x^2+x+1)dx$

$\displaystyle=2\int_0^2(x^2+1)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2=2\left(\frac{8}{3}+2\right)=2\cdot\frac{14}{3}=\mathbf{\frac{28}{3}}$

[2]　(1)　$\displaystyle f(x)=3x^2+2-\int_0^2 xf(t)dt=3x^2+2-x\int_0^2 f(t)dt$

$\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=a$　とおくと　$f(x)=3x^2-ax+2$

$\displaystyle a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2(3t^2-at+2)dt=\left[t^3-\frac{a}{2}t^2+2t\right]_0^2=12-2a$

よって　$a=12-2a$　より　$a=4$

したがって　$f(x)=\mathbf{3}x^2-\mathbf{4}x+\mathbf{2}$

(2)　等式の両辺を x で微分すると

$f(x)=\mathbf{2}x+\mathbf{2}$　である.

また，等式において $x=a$ のとき　$0=a^2+2a-3=(a+3)(a-1)$

よって　$a=-\mathbf{3},\ \mathbf{1}$　である.

第32講　微分法・積分法(5)

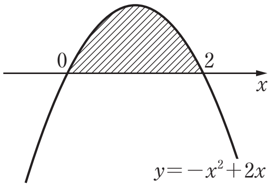
(1)　$y=-x^2+2x$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である.

(2)　$y=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}$ と x 軸，y軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である.

(3)　$f(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}|x-a|dx$ は　$t=a-\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のとき　最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる.

(1)　求める面積は

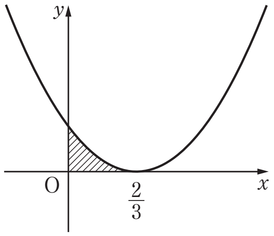
$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=-\int_0^2 x(x-2)dx=\frac{1}{6}\times 2^3=\mathbf{\frac{4}{3}}$$



(2)　求める面積は

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)dx=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2dx=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^3\right]_0^{\frac{2}{3}}$$

$$=0-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{8}{81}}$$



(3)　$t+1\leqq a$　つまり　$t\leqq a-1$ のとき

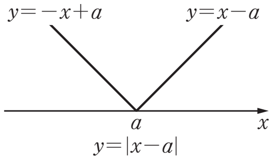
$$f(t)=\int_t^{t+1}(-x+a)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_t^{t+1}=-t+a-\frac{1}{2}$$

$t\leqq a\leqq t+1$　つまり　$a-1\leqq t\leqq a$ のとき

$$f(t)=\int_t^a(-x+a)dx+\int_a^{t+1}(x-a)dx$$

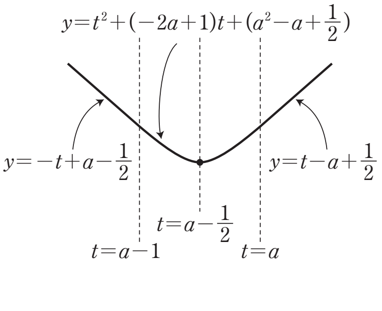
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_t^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^{t+1}$$

$$=t^2+(-2a+1)t+\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=\left\{t-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\frac{1}{4}$$



$a\leqq t$ のとき　$f(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}(x-a)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_t^{t+1}=t-a+\frac{1}{2}$

よって　$f(t)$ は $t=a-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$ のとき最小値 $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ をとる.



第 33 講　微分法・積分法(6)

(1)　2 つの曲線 C_1：$y=x^2-x$，C_2：$y=x^2-3x+3$ と直線 l：$y=x-1$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である．

(2)　$m<2$ のとき，直線 $y=mx$ と曲線 $y=-x^2+2x$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{1}{\boxed{エ}}(\boxed{オ}-m)^{\boxed{カ}}$ である．このとき直線 $y=mx$ が，$y=-x^2+2x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を 2 等分する m の値は　$m=\boxed{キ}-\sqrt[\boxed{ク}]{\boxed{ケ}}$ である．

(1)　C_1 と C_2 の共有点の x 座標は　$x^2-x=x^2-3x+3$　より　$x=\dfrac{3}{2}$

C_1 と l の共有点の x 座標は　$x^2-x=x-1$　より　$x^2-2x+1=0$　　$(x-1)^2=0$

よって　$x=1$

C_2 と l の共有点の x 座標は　$x^2-3x+3=x-1$　より　$x^2-4x+4=0$　　$(x-2)^2=0$

よって　$x=2$

したがって　C_1 と l，C_2 と l はそれぞれ接する．

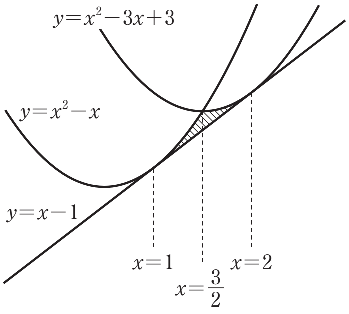
よって　求める面積は

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\{(x^2-x)-(x-1)\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^2\{(x^2-3x+3)-(x-1)\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^2(x-2)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{3}{2}}^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-0+0-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$



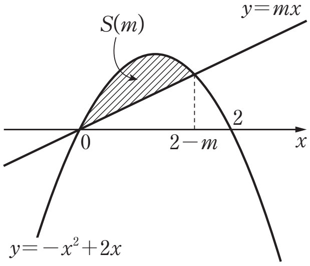
(2)　$y=mx$ と $y=-x^2+2x$ より　$x^2+(m-2)x=0$　　$x=0,\ 2-m$

よって　直線 $y=mx$ と曲線 $y=-x^2+2x$ によって囲まれる部分の面積は

$$S(m)=\int_0^{2-m}\{(-x^2+2x)-mx\}dx=-\int_0^{2-m}x\{x-(2-m)\}dx=\boldsymbol{\frac{1}{6}(2-m)^3}$$

$S(m)=\dfrac{1}{2}\times S(0)$　より　$\dfrac{1}{6}(2-m)^3=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}$

$(2-m)^3=4$　　$2-m=\sqrt[3]{4}$　　よって　$m=\boldsymbol{2-\sqrt[3]{4}}$



第34講　数列(1)

(1)　第10項が -20，第20項が -50 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=-$ [ア] $n+$ [イウ] である．よって　-110 は数列 $\{a_n\}$ の第 [エオ] 項であり，

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和の最大値は [カキ] である．

(2)　公比が実数である等比数列 $\{a_n\}$ において，$a_6+a_7+a_8=3$，$a_9+a_{10}+a_{11}=-\dfrac{3}{8}$ が成り立つ．このとき　$a_{10}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると

$a_{10}=-20$　より　$a+9d=-20$　……①

$a_{20}=-50$　より　$a+19d=-50$　……②

①，②より　$a=7$，$d=-3$　　　よって　$a_n=7+(n-1)\cdot(-3)=\mathbf{-3}n+\mathbf{10}$

$a_n=-110$　であるから　$-3n+10=-110$　　$n=40$

よって　-110 は第 **40** 項である．

$a_n<0$　となる n は $-3n+10<0$　　$n>\dfrac{10}{3}=3.3\cdots\cdots$

したがって　数列 $\{a_n\}$ が初めて負になるのは第4項である．

ゆえに数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和の最大値は，初項から第3項までの和

つまり $\dfrac{3}{2}(a_1+a_3)=\dfrac{3}{2}(7+1)=\mathbf{12}$　である．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とする．

$a_6+a_7+a_8=3$　より　$ar^5+ar^6+ar^7=3$

つまり　$ar^5(1+r+r^2)=3$　……①

$a_9+a_{10}+a_{11}=-\dfrac{3}{8}$ より　$ar^8+ar^9+ar^{10}=-\dfrac{3}{8}$

つまり　$ar^8(1+r+r^2)=-\dfrac{3}{8}$　……②

②に①を代入して　$3r^3=-\dfrac{3}{8}$　　$r^3=-\dfrac{1}{8}$　　公比 r は実数より　$r=-\dfrac{1}{2}$

このとき　①より　$a\cdot\left(-\dfrac{1}{32}\right)\cdot\dfrac{3}{4}=3$　　$a=-128$

よって　$a_{10}=ar^9=-128\cdot\left(-\dfrac{1}{512}\right)=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

第 35 講　数列(2)

(1)　数列 $1\cdot n,\ 3\cdot(n-1),\ 5\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ (2n-3)\cdot 2,\ (2n-1)\cdot 1$　の和は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}n(n+1)(\boxed{\text{イ}}n+1)$$　である．

(2)　数列 $\dfrac{1}{2\cdot 5},\ \dfrac{1}{5\cdot 8},\ \dfrac{1}{8\cdot 11},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$　の和は

$$\frac{n}{\boxed{\text{ウ}}(\boxed{\text{エ}}n+\boxed{\text{オ}})}$$　である．

(3)　数列 $\{a_n\}$: 5, 7, 11, 19, 35, …… の一般項は　$a_n=\boxed{\text{カ}}^n+\boxed{\text{キ}}$　である．

(1)　この数列の第 k 項を a_k, 求める和を S_n とすると，

$$a_k=(2k-1)(n+(k-1)\cdot(-1))=(2k-1)\{-k+(n+1)\}$$
$$=-2k^2+(2n+3)k-(n+1)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\}$$
$$=-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(2n+3)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)\cdot n$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-2(2n+1)+3(2n+3)-6\}$$
$$=\frac{1}{\mathbf{6}}n(n+1)(\mathbf{2}n+1)$$

(2)　$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

よって求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n}{2(3n+2)}=\frac{n}{\mathbf{2}(\mathbf{3}n+\mathbf{2})}$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$\{b_n\}$: 2, 4, 8, 16, …… より数列 $\{b_n\}$ は初項 2, 公比 2 の等比数列である．

よって $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

したがって $n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3$

この式は $n=1$ のときも成り立つ．　ゆえに $a_n=\mathbf{2}^n+\mathbf{3}$

第 36 講　数列(3)

［1］　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=4n^2-3n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の初項は $a_1=$ [ア] である．また一般項は $a_n=$ [イ] $n-$ [ウ] である．

［2］　分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列を考える．

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

(1)　この数列において，$\dfrac{7}{18}$ は第 [エオカ] 項である．

(2)　第 99 項は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である．

［1］　$a_1=S_1=4\cdot1^2-3\cdot1=\mathbf{1}$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(4n^2-3n)-\{4(n-1)^2-3(n-1)\}=8n-7$

この式で $n=1$ のとき　$a_1=1$　よって　$n=1$ のときも成り立つ．

ゆえに $a_n=\mathbf{8}n-\mathbf{7}$

［2］　分母と分子の和が同じ分数を 1 つの群として考える．

$$\frac{1}{1}\ \Big|\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4}\cdots\cdots$$

第 n 群の項数は n 個であり，第 n 群までの項の総数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

である．

また，第 n 群に含まれる分数の分母と分子の和は $n+1$ であり，分子は各群の何番目の項かを表している．

(1)　$\dfrac{7}{18}$ は第 24 群の 7 番目の数である．第 23 群までに　$\dfrac{1}{2}\cdot23\cdot24=276$ 項ある．

よって　$\dfrac{7}{18}$ は　第 **283** 項である．

(2)　第 99 項が第 n 群に属するとすると，

$$\frac{1}{2}(n-1)n<99\leqq\frac{1}{2}n(n+1)\qquad つまり\quad (n-1)n<198\leqq n(n+1)$$

これを満たす自然数 n は　$n=14$ のみ．第 13 群までに　$\dfrac{1}{2}\cdot13\cdot14=91$ 項ある．

したがって　第 99 項は第 14 群の 8 番目の項，すなわち　$\dfrac{8}{14-8+1}=\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{7}}$　である．

第37講　数列(4)

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=n+1$　のとき　$a_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}(n^2+n+\boxed{\text{イ}})$　である.

(2)　$a_1=2,\ 2a_{n+1}=a_n+1$　のとき $a_n=\left(\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^{n-1}+\boxed{\text{エ}}$　である.

(3)　$a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+4}$　のとき　$a_n=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}\cdot\boxed{\text{キ}}^{n-1}-\boxed{\text{ク}}}$ である.

(1)　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=2+\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

この式は $n=1$ のときも成立する.

よって　$a_n=\dfrac{1}{\mathbf{2}}(n^2+n+\mathbf{2})$

(2)　$2a_{n+1}=a_n+1$　より　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

つまり　$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$,　$a_1-1=1$

よって　$a_n-1=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　より　$a_n=\left(\dfrac{1}{\mathbf{2}}\right)^{n-1}+\mathbf{1}$

(3)　帰納的に $a_n>0$ である.

よって　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+4}$　の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=4\cdot\frac{1}{a_n}+2$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと,$b_{n+1}=4b_n+2$,$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$

$$b_{n+1}+\frac{2}{3}=4\left(b_n+\frac{2}{3}\right),\quad b_1+\frac{2}{3}=1$$

よって　$b_n+\dfrac{2}{3}=1\cdot 4^{n-1}$　より　$b_n=-\dfrac{2}{3}+4^{n-1}=\dfrac{3\cdot 4^{n-1}-2}{3}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{3}\cdot\mathbf{4}^{n-1}-\mathbf{2}}$

第 38 講　数列(5)

n を自然数とする．$n \geqq 5$ のとき　$2^n > n^2$　……①　であることを数学的帰納法で証明したい．

$n=5$ のとき　(①の左辺)＝**アイ**，　(①の右辺)＝**ウエ** より　①は成り立つ．

$n=k(\geqq 5)$ のとき　①が成り立つ，つまり　$2^k > k^2$ が成り立つと仮定する．

$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2\cdot k^2$

ここで　$k \geqq 5$ のとき

$2k^2-(k+1)^2=(k-$ **オ** $)^2-$ **カ** $\geqq$ **キク** >0　より

$2^{k+1} > (k+1)^2$　　よって　$n=k+1$ のときも①は成立する．

以上より，5 以上のすべての自然数 n で　$2^n > n^2$　が成立する．

$2^n > n^2$　……①　について

$n=5$ のとき　(①の左辺)$=2^5=$**32**　　(①の右辺)$=5^2=$**25**　より①は成り立つ．

$n=k(\geqq 5)$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$2^k > k^2$

このとき

$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2\cdot k^2$

ここで

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-\mathbf{1})^2-\mathbf{2} \geqq 4^2-2=\mathbf{14}>0$　より

$2^{k+1} > (k+1)^2$　　よって　$n=k+1$ のときも①は成立する．

以上より，5 以上のすべての自然数 n で　$2^n > n^2$　が成立する．

第39講　平面ベクトル(1)

(1)　平行四辺形ABCDにおいて，辺BCを2：1に内分する点をEとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$とすると，$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=\vec{a}-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}$　である．

(2)　$\vec{a}=(-1,\ 7)$，$\vec{b}=(8,\ -11)$，$\vec{c}=(2,\ 1)$のとき，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$となる実数$m$，$n$は$m=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$，$n=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$　である．また，$\vec{a}+t\vec{b}$が$\vec{c}$と平行になる実数tの値は$t=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$である．

(1)　$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\mathbf{\dfrac{2}{3}}\vec{b}$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\vec{a}-\mathbf{\dfrac{1}{3}}\vec{b}$

【別解】　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\left(\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)-\vec{b}=\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(2)　$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$　より　$(2,\ 1)=m(-1,\ 7)+n(8,\ -11)=(-m+8n,\ 7m-11n)$

よって　$2=-m+8n$，$1=7m-11n$

これらより　$m=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$，$n=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

また，$\vec{a}+t\vec{b}\parallel\vec{c}$　より　$\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$　(kは実数) とおける．

$(-1,\ 7)+t(8,\ -11)=k(2,\ 1)$

$(-1+8t,\ 7-11t)=(2k,\ k)$

よって　$-1+8t=2k$，$7-11t=k$

これらよりkを消去して　$t=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

第 40 講　平面ベクトル(2)

(1)　ベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ -\sqrt{3})$ において，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-$ ア $\sqrt{\text{イ}}$，

$|\vec{a}|=$ ウ ，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は エオカ° である．

(2)　ベクトル $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ で，$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-$ キ である．

(3)　$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値は $t=\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ であり，そのときの最小値は $\sqrt{\text{コ}}$ である．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times(-1)+1\times(-\sqrt{3})=-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$

$|\vec{a}|=\sqrt{3+1}=\mathbf{2}$　　$|\vec{b}|=\sqrt{1+3}=2$

よって $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$\theta=\mathbf{150}°$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ と $2\vec{a}+5\vec{b}$ が垂直であることより

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+5\vec{b})=0$　　$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ より　$8+3\vec{a}\cdot\vec{b}-5=0$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\mathbf{1}$

(3)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=9t^2-6t+4=9\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+3$

よって　$t=\dfrac{1}{3}$ のとき　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 3 をとる．

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ より　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小のとき　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小

したがって　$t=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ のとき最小値 $\sqrt{\mathbf{3}}$ をとる．

第41講　平面ベクトル(3)

△ABC と点 P に対して，等式　$5\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立つとき，

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ウエ}}=\dfrac{\boxed{ア}+\boxed{イ}}{\boxed{ウエ}}\cdot\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ア}+\boxed{イ}}$ と変形できる．$\dfrac{\boxed{ア}\overrightarrow{AB}+\boxed{イ}\overrightarrow{AC}}{\boxed{ア}+\boxed{イ}}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと，点 Q は辺 BC を $\boxed{イ}:\boxed{ア}$ に内分する点であり．点 P は線分 AQ を $\boxed{オ}:\boxed{カ}$ に内分する点である．また面積比 △PBC：△PCA：△PAB＝$\boxed{キ}:\boxed{ク}:\boxed{ケ}$ である．

$5\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$　より

$5\overrightarrow{AP}+4(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$12\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$　　よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\mathbf{4}\overrightarrow{AB}+\mathbf{3}\overrightarrow{AC}}{\mathbf{12}}=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{7}$

$\dfrac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{7}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと，点 Q は辺 BC を 3：4 に内分する点である．

また，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{AQ}$　より　点 P は線分 AQ を **7**：**5** に内分する点である．

△ABC＝S とすると，△PBC＝$\dfrac{5}{12}S$，△PCA＋△PAB＝$\dfrac{7}{12}S$ である．

△PCA：△PAB＝CQ：QB＝4：3　より

△PCA＝$\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{7}{12}S=\dfrac{4}{12}S$　　　△PAB＝$\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{7}{12}S=\dfrac{3}{12}S$

したがって △PBC：△PCA：△PAB＝$\dfrac{5}{12}S:\dfrac{4}{12}S:\dfrac{3}{12}S=\mathbf{5}:\mathbf{4}:\mathbf{3}$

第42講　平面ベクトル(4)

三角形ABCにおいて，辺BCを3：2に内分する点をD，辺ACを2：1に内分する点をE，線分ADと線分BEの交点をFとする．

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{AC}$　であり，A，F，Dは一直線にあるので，$\overrightarrow{AF}$は実数

kを用いて　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}k\overrightarrow{AC}$　……①　と表せる．

また，BF：FE$=t：(1-t)$とおくと，

$\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}t\overrightarrow{AC}$　……②　と表せる．

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$は1次独立より，①，②から　k，tを求めることができる．したがって，

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{キク}}\overrightarrow{AC}$　である．

BD：DC＝3：2より　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\mathbf{3}}{5}\overrightarrow{AC}$

よって　$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}k\overrightarrow{AC}$　……①　と表せる．

また，BF：FE$=t：(1-t)$とおくと

$$\overrightarrow{AF}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}t\overrightarrow{AC}\quad……②\quad と表せる．$$

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$は1次独立より，①，②から

$$\dfrac{2}{5}k=1-t,\ \dfrac{3}{5}k=\dfrac{2}{3}t\qquad これらより\quad k=\dfrac{10}{13},\ t=\dfrac{9}{13}$$

したがって　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{13}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\mathbf{6}}{13}\overrightarrow{AC}$

第43講　平面ベクトル(5)

点 A(4, 5) から直線 l : $x+2y-6=0$ に垂線を引き，l との交点を H とする．このとき，点 H の座標と線分 AH の長さをベクトルを用いて求めたい．

直線 l の法線ベクトルの1つを $\vec{n}=(1,$ [ア] $)$，H の座標を H(s, t) とおく．$\vec{n} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ と表せる．よって $s=k+$ [イ]，$t=2k+$ [ウ] である．

点 H は l 上の点より，$k=-\dfrac{[エ]}{[オ]}$ である．したがって H$\left(\dfrac{[カキ]}{[ク]}, \dfrac{[ケ]}{[ク]}\right)$ であり，AH の長さは $\dfrac{[コ]}{\sqrt{[サ]}}$ である．

直線 l : $x+2y-6=0$ の法線ベクトルの1つは　$\vec{n}=(1,\ \mathbf{2})$ である．
H の座標を H(s, t) とおくと，$\vec{n} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AH}}$　より

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$　より　$(s-4,\ t-5)=k(1,\ 2)$

よって　$s-4=k$，$t-5=2k$　より　$s=k+\mathbf{4}$，$t=2k+\mathbf{5}$

また，点 H は l 上の点より，$s+2t-6=0$

したがって　$(k+4)+2(2k+5)-6=0$　　したがって　$k=-\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$

$s=\dfrac{12}{5}$，$t=\dfrac{9}{5}$　より　H$\left(\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{5}}, \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=-\dfrac{8}{5}\vec{n}=-\dfrac{8}{5}(1,\ 2)$　より　$\mathrm{AH}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{8}{5}\sqrt{1+4}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$

第44講　空間ベクトル(1)

1辺の長さが4である正四面体OABCにおいて，辺OA，BCの中点をそれぞれM，N，線分MNの中点をGとする．$\overrightarrow{OG}$と$\overrightarrow{AG}$のなす角をθとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする．

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{AG}=-\dfrac{1}{\boxed{\text{イ}}}(\boxed{\text{ウ}}\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$　である．

(2)　$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}=\boxed{\text{エオ}}$，　$|\overrightarrow{OG}|^2=\boxed{\text{カ}}$，　$|\overrightarrow{AG}|^2=\boxed{\text{キ}}$　である．

(3)　$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$　である．

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right)=\dfrac{1}{\mathbf{4}}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)-\vec{a}=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=-\dfrac{1}{\mathbf{4}}(\mathbf{3}\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=4\times4\times\cos60^\circ=8$　より

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{16}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$
$$=-\frac{1}{16}(3|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$=-\frac{1}{16}(3\cdot16-16-16+2\times8-2\times8+2\times8)$$
$$=\mathbf{-2}$$

$$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{16}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{1}{16}(16+16+16+2\times8+2\times8+2\times8)=\mathbf{6}$$

$$|\overrightarrow{AG}|^2=\frac{1}{16}|3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|^2=\frac{1}{16}(9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-6\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{1}{16}(9\times16+16+16-6\times8+2\times8-6\times8)=\mathbf{6}$$

(3)　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{OG}||\overrightarrow{AG}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

第 45 講　空間ベクトル(2)

四面体 ABCD の辺 BC の中点を P，線分 PD の中点を Q，線分 AQ の中点を R とする．また，直線 BR と平面 ACD の交点を S とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}(\vec{b}+\vec{c}+\boxed{イ}\vec{d})$　である．

(2)　点 S は直線 BR 上にあるので，$\overrightarrow{BS}=k\overrightarrow{BR}$（$k$ は実数）とおくと，

$$\overrightarrow{AS}=\left(1-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}k\right)\vec{b}+\frac{k}{\boxed{オ}}\vec{c}+\frac{k}{\boxed{カ}}\vec{d}\quad\cdots\cdots①$$　と表せる．

また，点 S は平面 ACD 上にあるので，$\overrightarrow{AS}=s\vec{c}+t\vec{d}$（$s$，$t$ は実数）　……②　とおける．

①，②より　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{d}$ である．

(1)　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{d}\right)=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}$　より

$$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\times\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}=\frac{1}{\mathbf{8}}(\vec{b}+\vec{c}+\mathbf{2}\vec{d})$$

(2)　点 S は直線 BR 上にあるので，$\overrightarrow{BS}=k\overrightarrow{BR}$（$k$ は実数）とおくと，

$$\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AS}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AR}$$

$$=(1-k)\vec{b}+k\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{8}\right)=\left(1-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}k\right)\vec{b}+\frac{k}{\mathbf{8}}\vec{c}+\frac{k}{\mathbf{4}}\vec{d}\quad\cdots\cdots①$$

また，点 S は平面 ACD 上にあるので，$\overrightarrow{AS}=s\vec{c}+t\vec{d}$　（s，t は実数）　……②　とおける．

$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は１次独立より，①，②から

$1-\dfrac{7}{8}k=0$，　$\dfrac{k}{8}=s$，　$\dfrac{k}{4}=t$　　　よって　$k=\dfrac{8}{7}$，$s=\dfrac{1}{7}$，$t=\dfrac{2}{7}$

したがって　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\vec{c}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\vec{d}$

第46講　空間ベクトル(3)

原点をOとし，3点A(2，0，0)，B(0，4，0)，C(0，0，3)をとる．原点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線の足をHとする．このときHの座標は

$\left(\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}},\ \dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{ウエ}},\ \dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ウエ}}\right)$ であり，$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\sqrt{\boxed{ウエ}}}$ である．

点Hは平面ABC上にあるので，実数 s，t，u を用いて

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$

と表せる．

$\overrightarrow{OH}=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 4,\ 0)+u(0,\ 0,\ 3)=(2s,\ 4t,\ 3u)$

OH⊥平面ABCより　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 3)$ より

$2s\times(-2)+4t\times4=0$，$2s\times(-2)+3u\times3=0$　これらより　$t=\dfrac{1}{4}s$，$u=\dfrac{4}{9}s$

これと $s+t+u=1$ より　$s+\dfrac{1}{4}s+\dfrac{4}{9}s=1$　　よって　$s=\dfrac{36}{61}$

このとき　$t=\dfrac{9}{61}$，$u=\dfrac{16}{61}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{72}{61},\ \dfrac{36}{61},\ \dfrac{48}{61}\right)$　より　Hの座標は $\left(\boldsymbol{\dfrac{72}{61}},\ \boldsymbol{\dfrac{36}{61}},\ \boldsymbol{\dfrac{48}{61}}\right)$

また，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{12}{61}(6,\ 3,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{12}{61}\sqrt{36+9+16}=\dfrac{12\sqrt{61}}{61}=\boldsymbol{\dfrac{12}{\sqrt{61}}}$

第 47 講　整数の性質(1)

(1)　最大公約数が 5，最小公倍数が 75 である 2 つの自然数 a，b（$a<b$）は

$(a,\ b)=($ **ア** , **イウ** $),\ ($ **エオ** , **カキ** $)$　である．

(2)　a，b を整数とする．a を 5 で割ると 2 余り，b を 5 で割ると 3 余る．$a+b$，ab，a^2+b^2 を 5 で割った余りはそれぞれ **ク** , **ケ** , **コ** である．

(1)　最大公約数が 5 である 2 数 a，b（$a<b$）は

$a=5a'$，$b=5b'$　（$a'b'$ は $a'<b'$ を満たす互いに素の自然数）と表される．

このとき，a，b の最小公倍数は $5a'b'$ であることより

$5a'b'=75$　　つまり　$a'b'=15$

$a'b'$ は $a'<b'$ を満たす互いに素の自然数であることより

$(a',\ b')=(1,\ 15),\ (3,\ 5)$

したがって，$(a,\ b)=(\mathbf{5},\ \mathbf{75}),\ (\mathbf{15},\ \mathbf{25})$

(2)　a，b は整数 m，n を用いて

$a=5m+2$，$b=5n+3$

と表される．

$a+b=(5m+2)+(5n+3)=5(m+n+1)$

よって 5 で割った余りは　**0**

$ab=(5m+2)(5n+3)=25mn+15m+10n+6=5(5mn+3m+2n+1)+1$

よって　5 で割った余りは　**1**

$a^2+b^2=(5m+2)^2+(5n+3)^2$

$=25m^2+20m+25n^2+30n+13$

$=5(5m^2+4m+5n^2+6n+2)+3$

よって　5 で割った余りは　**3**

第48講　整数の性質(2)

$37x-90y=4$　……①　を満たす整数解を求めたい．

$90=37\times2+$ [アイ]　より　[アイ] $=90-37\times2$　……②

$37=$ [アイ] $\times2+$ [ウ]　より

[ウ] $=37-$ [アイ] $\times2=37-(90-37\times2)\times2=5\times37-2\times90$　……③

[アイ] $=$ [ウ] $\times3+1$　より　$1=$ [アイ] $-$ [ウ] $\times3$　これに②，③の結果を反映させることにより

$37\times(-$ [エオ] $)-90\times(-$ [オ] $)=1$　　これを両辺4倍して①と差を取ることにより

①は　$37(x+$ [カキ] $)=90(y+$ [クケ] $)$　と変形できる．

37と90は互いに素であることより，整数 k を用いて

$x+$ [カキ] $=90k$　つまり　$x=-$ [カキ] $+90k$　と表せる．

したがって求める①の整数解は $x=-$ [カキ] $+90k$，$y=-$ [クケ] $+37k$（k；整数）と表せる．

$37x-90y=4$　……①

$90=37\times2+\mathbf{16}$　より　$16=90-37\times2$　……②

$37=16\times2+\mathbf{5}$　より　$5=37-16\times2=37-(90-37\times2)\times2=5\times37-2\times90$　……③

$16=5\times3+1$　より　$1=16-5\times3=(90-37\times2)-(5\times37-2\times90)\times3$

$=37\times(-17)-90\times(-7)$

つまり　$37\times(-\mathbf{17})-90\times(-\mathbf{7})=1$

これを両辺4倍して　$37\times(-68)-90\times(-28)=4$　……④

①－④より　$37(x+\mathbf{68})-90(y+\mathbf{28})=0$

すなわち　①は　$37(x+68)=90(y+28)$　と変形できる．

37と90は互いに素であることより，整数 k を用いて

$x+68=90k$　つまり　$x=-68+90k$　と表せる．

このとき　$37\times90k=90(y+28)$　より

$y+28=37k$　　つまり　$y=-28+37k$　と表せる．

したがって求める①の整数解は

$x=-68+90k$，$y=-28+37k$（k；整数）と表せる．

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。